

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Modellierung von thermischen Regeneratoren und Speichern	5
2.1	Thermische Zellen als Elemente des Regeneratormodells	5
2.2	Allgemeines Regeneratormodell als Netzwerk von thermischen Zellen	8
2.3	Modell des Idealen Regenerators	13
2.4	Regenerator als Speicher für thermische Energie	16
3	Allgemeine Lösung der Differenzialgleichungen für thermische Speicher und Regeneratoren	19
3.1	Differenzialgleichungssysteme mit ungleichen Eigenwerten	20
3.2	Differenzialgleichungssysteme mit identischen Eigenwerten	22
4	Simulation von thermischen Regeneratoren und Speichern	24
4.1	Simulation einzelner Teilprozesse von Regeneratoren	24
4.2	Iterationsfreie Ermittlung quasistationärer Zustände bei zyklischen Prozessen	25
4.3	Beispiel: Idealer Regenerator	27
4.4	Beispiel: Allgemeines Regeneratormodell	29
4.5	Beispiel: Thermischer Speicher	34
5	Zusammenfassung	38
6	Formelzeichen	39
6.1	Skalare	39
6.2	Vektoren	39
6.3	Matrizen	40
6.4	Indizes	40
7	Literatur	41

Allgemeines Simulationsmodell für Thermische Regeneratoren

Prof. Dr.-Ing. O. Strelow

Technische Hochschule Mittelhessen - FB Maschinenbau & Energietechnik
Institut für Thermodynamik, Energieverfahrenstechnik u. Systemanalyse

St. Tönis, 27.02.2021

1 Einleitung

Regeneratoren sind Apparate zur Rückgewinnung von thermischer Energie, in denen Wärme von einem wärmeabgebenden Prozessstrom auf einen wärmeaufnehmendem Prozessstrom übertragen wird. Im Gegensatz zu Rekuperatoren sind die Prozessströme in Regeneratoren nicht durch eine Wandung getrennt. Dadurch wird Wärme nicht simultan von einem Prozessstrom zum anderen übertragen, sondern mit einem Festkörper zwischengespeichert. Regeneratoren arbeiten meist diskontinuierlich mit ortsfesten Speichermassen, aber auch kontinuierlich mit rotierenden Speichermassen. Anwendungen von Regeneratoren sind Lüftungsprozesse der Gebäudetechnik, Kraftwerksprozesse sowie Hochtemperaturprozesse der Metallurgie und Glasherstellung. Darüber hinaus sind Regeneratoren als Energiespeicher einsetzbar. Das physikalisch-technologische Prinzip eines Regenerators mit ortsfester Speichermasse ist in Abbildung 1 dargestellt.

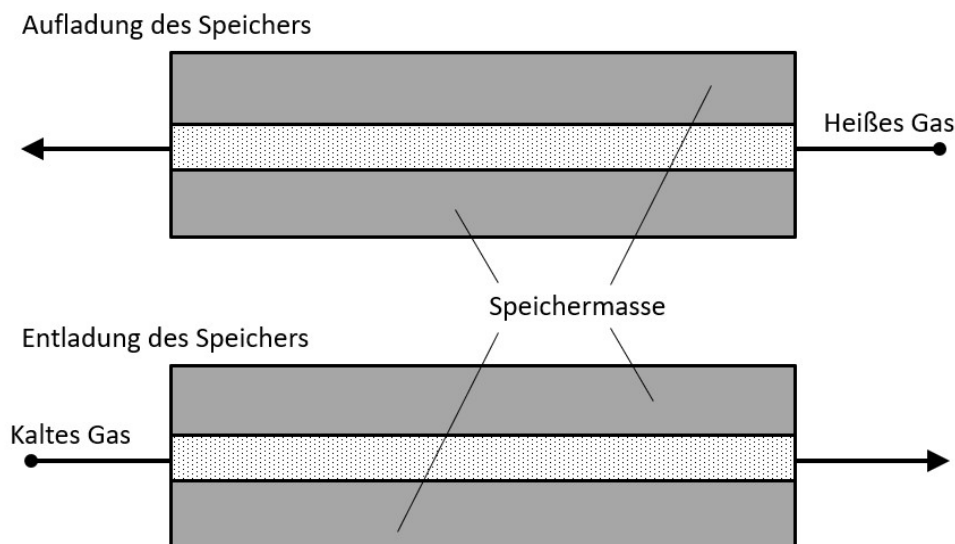


Abbildung 1: Betriebsphasen eines thermischen Speichers bzw. Regenerators

Die thermische Energie wird in direktem Kontakt abwechselnd von einem Prozessstrom höherer Temperatur auf einen Festkörper und von diesem Festkörper auf einen Prozessstrom geringerer Temperatur übertragen. Der Festkörper erfährt eine zyklische Änderung seines Temperaturprofils und fungiert somit als Zwischenspeicher für thermische Energie. Obwohl das physikalische Prinzip von Regeneratoren einfach erscheint, erfordert die Berechnung einen hohen mathematischen und rechentechnischen Aufwand. Dies ist vor allem der zyklischen Betriebsweise geschuldet. Traditionell werden die Modellgleichungen mit einem numerischen Lösungsverfahren z.B. Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung gelöst. Zur Ermittlung des quasistationären Zustandes einer zyklisch arbeitenden Regeneratoranlage sind zahlreiche Iterationen erforderlich, um die Temperaturprofile vor bzw. nach dem Entladungsprozess und dem Aufladungsprozess abzugleichen. Die benötigte Rechenzeit ist bei befriedigender Genauigkeit nicht unerheblich.

Der nachfolgende Aufsatz zeigt das Grundprinzip einer analytisch basierten iterationslosen Berechnung von diskontinuierlich arbeitenden Regeneratoren. Es wird empfohlen die zahlreichen mathematischen Beziehungen der Herleitungen zunächst „quer“ zu lesen. Bei fachlichem Interesse bietet der Aufsatz während des wiederholten Lesens einen tiefgründigen Themenzugang. Darüber hinaus wird das dargelegte Modell an drei Beispielen demonstriert.

2 Modellierung von thermischen Regeneratoren und Speichern

Für ein adäquates mathematisches Regenerator-Modell ist die Verwendung eines physikalisch begründeten inkrementellen Ansatzes zielführend. Die Zahl der Inkremente k und damit die Genauigkeit des Modells ist beliebig wählbar. Lediglich die verfügbare Rechnerleistung setzt der Modellauflösung Grenzen. Eintausend Inkremente ($k = 1000$) sind für moderne PCs mit Standardsoftware (z.B. VBA) kein Problem. Die Rechenzeit zur Ermittlung des quasistationären Zustandes liegt hierbei schon deutlich unter einer Minute. Das Prinzip des vorgeschlagenen Modells wird nachfolgend entwickelt und an Beispielen demonstriert.

2.1 Thermische Zellen als Elemente des Regeneratormodells

Das physikalisch basierte Regeneratormodell ist modular aufgebaut. Es erfordert zwei Elemente in Form inkrementeller Gas- oder Feststoffzellen, deren thermisches Verhalten mit Bilanzgleichungen mathematisch formuliert wird. Die Masse innerhalb einer Zelle ist thermischer Speicher und bewirkt zeitlich verzögertes Verhalten. Diese instationäre Eigenschaft erfordert zur Bilanzierung von Festkörperzellen Differenzialgleichungen. Dagegen beeinflussen Gaszellen auf Grund ihrer geringen Masse das Zeitverhalten des Regenerators nur unwesentlich. Daher sind zur Modellierung der thermischen Eigenschaften von Gaszellen algebraische Bilanzgleichungen ausreichend, wodurch auch Schwierigkeiten bei der Lösung eines steifen Differenzialgleichungssystems Apriori ausgeschlossen sind.

Jede Konstruktion eines Regenerators ist als Netzwerk aus Gas- und Feststoffzellen modellierbar. Die Temperaturen innerhalb der Zellen werden räumlich konstant, jedoch

zeitabhängig beschrieben. Zwischen den Zellen existieren drei Prinzipien thermischer Wechselwirkungen in Form von konduktiven und konvektiven Energieströmen.

Das Schema in Abbildung 2 zeigt das erste Kopplungsprinzip zwischen zwei thermisch gekoppelten inkrementellen Feststoffzellen.

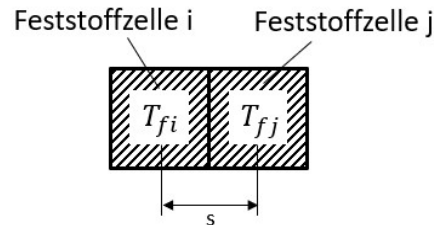


Abbildung 2: Zwei konduktiv gekoppelte Feststoffzellen

Für den konduktiven Energiestrom zwischen den Feststoffzellen i und j gilt die Gleichung für Wärmeleitung

$$\dot{Q}_{ij} = \frac{\lambda A}{s} (T_{fi} - T_{fj}) = L_f (T_{fi} - T_{fj}) \quad (1)$$

In der Abbildung 3 ist das analoge zweite Prinzip des konduktiven Wärmetransportes zwischen einer Gas- und einer Feststoffzelle dargestellt

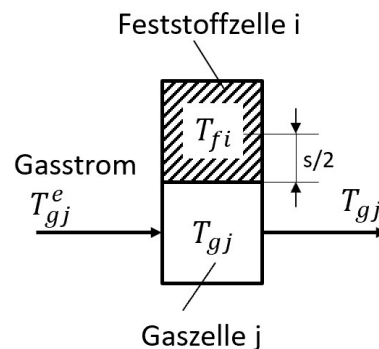


Abbildung 3: Konduktive Kopplung zwischen Gas- und Feststoffzelle

Der thermische Energiestrom zwischen der Feststoffzelle i und der Gaszelle j mathematisch formuliert lautet

$$\dot{Q}_{ij} = \frac{\alpha A}{1 + \frac{\alpha s}{2\lambda}} (T_{fi} - T_{gj}) = L_g (T_{fi} - T_{gj}) \quad (2)$$

Die Abbildung 4 zeigt als drittes Prinzip den konvektiven Energietransport zwischen zwei Gaszellen

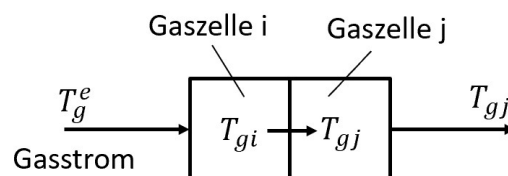


Abbildung 4: Konvektiver Energietransport zwischen Gaszellen

Der konvektive Energietransport von Gaszelle i nach Gaszelle j wird mit folgender Gleichung beschrieben

$$\dot{H}_i = \dot{m}_g c_g T_{gi} = \dot{C}_g T_{gi} \quad (3)$$

Prinzipiell sind Gaszellen auch konduktiv gekoppelt. Die entsprechende Modellierung ist mathematisch zwar möglich, jedoch aus praktischer Sicht meist unerheblich. Nur in Ausnahmen z.B. im Verharrungszustand eines thermischen Speichers sind konduktive Kopplungen zwischen Gaszellen sinnvoll.

Die Energiebilanzen der inkrementellen Zellen für Gas und Feststoff setzen die Energieströme in Relation zueinander und vernetzen die Zellen quantitativ. Für die „instationäre“ Bilanz der i -ten Feststoffzelle über $n = 1, 2, \dots$ konduktive Energieströme gilt die Differenzialgleichung

$$\frac{dU_{fi}}{dt} = m_f c_f \frac{dT_{fi}}{dt} = C_f \frac{dT_{fi}}{dt} = \sum \dot{Q}_{in} = \sum L_n (T_n - T_i) \quad (4)$$

Der linke Term der Differenzialgleichung beschreibt die zeitliche Änderung der Inneren Energie der Speichermasse. Ist die Temperaturdifferenz auf der rechten Seite der Differenzialgleichungen größer null, nimmt die Innere Energie der Speichermasse zu, anderenfalls nimmt sie ab.

Die Formulierung der stationären thermischen Eigenschaften des Gasraumes der i -ten Gaszelle des Regenerators erfolgt mit einer algebraischen Bilanzgleichung. Für die „stationäre“ Bilanz einer Gaszelle über $n = 1, 2, \dots$ konduktive und $e = 1, 2, \dots$ eintretende und $a = 1, 2, \dots$ austretende konvektive Energieströme gilt

$$0 = \sum \dot{Q}_n + \sum \dot{H}_e - \sum \dot{H}_a = \sum L_n (T_n - T_i) + \sum \dot{C}_{ge} T_{ge} - \sum \dot{C}_{ga} T_{ga} \quad (5)$$

Nach Einsetzen der Gleichungen der Transportphänomene (1), (2) und (3) in die „instationäre“ Bilanz einer Feststoffzelle gilt nach Zusammenfassung

$$\frac{dT_{fi}}{dt} = \sum \frac{L_n}{C_f} (T_n - T_i) = \sum N_f (T_n - T_i) \quad \text{mit} \quad N_f = \frac{L}{C_f} \quad (6)$$

sowie für die „stationäre“ Bilanz der Gaszelle gilt

$$0 = \sum N_g (T_n - T_i) + \sum T_{ge} - \sum T_{ga} \quad \text{mit} \quad N_g = \frac{L}{\dot{C}_g} \quad (7)$$

Bei der Modellierung komplexer Strukturen von Gas- und Feststoffzellen entstehen große Gleichungssysteme. Die Verwendung von Matrizen und Vektoren ist dabei von großem Vorteil. Diese ermöglichen es, komplexe Modelle für beliebige Strukturen durch formal abzuarbeitende Algorithmen übersichtlich zu generieren. Derartige Algorithmen sind besonders für Computeranwendungen geeignet.

2.2 Allgemeines Regeneratormodell als Netzwerk von thermischen Zellen

Die konsequente Anwendung des Matrizenkalküls gestattet die automatische Generierung großer Gleichungssysteme, welche einen Regenerator als Netzwerk zahlreicher thermisch gekoppelter Feststoff- und Gaszellen beschreiben. Dies geschieht in völliger Analogie zu elektrischen oder hydraulischen Netzen mit Knoten und Leitungen [10, 13]. Die Abbildungen 3 und 4 zeigen einen schematischen Ausschnitt eines einfachen Regenerators bestehend aus $k = 10$ Zellen (Knoten), davon $f = 4$ Feststoffzellen und $g = 6$ Gaszellen. Zwischen den Zellen existieren $l = 8$ thermische Kopplungen (Leitungen). Es bestehen drei konduktive Kopplungen zwischen Feststoffzellen „ ff “, fünf konduktive Kopplungen „ fg “ zwischen Gas- und Feststoffzellen sowie sechs konvektive Kopplungen „ gg “ zwischen den Gaszellen. Die Abbildung 5 zeigt den Regenerator im Auflademodus

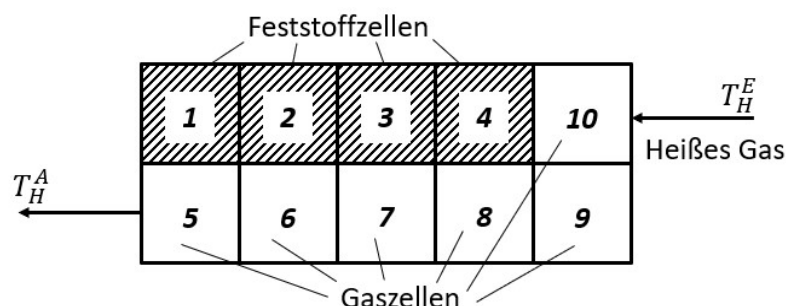


Abbildung 5: Einfacher Regenerator im Aufladeprozess

Abbildung 6 zeigt den Regenerator im Entlademodus

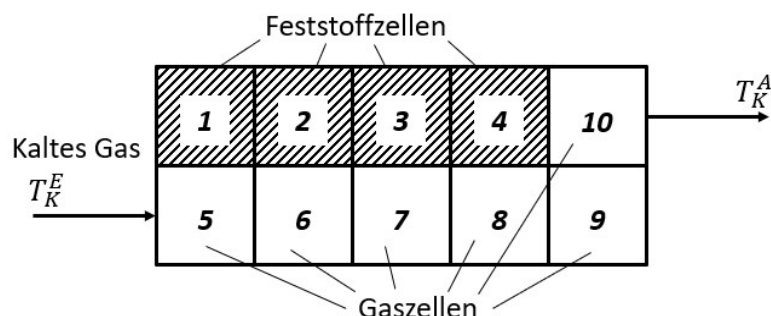


Abbildung 6: Einfacher Regenerator im Entladeprozess

Die Kopplungsmatrix $\underline{\mathbf{K}}$ formuliert die konduktiven thermischen Kopplungen zwischen den Zellen. Sie stellt den Zusammenhang von $l = 8$ thermische Kopplungen mit $k = 10$ Gas- und Feststoffzellen her. Jede Zeilennummer der Kopplungsmatrix entspricht der Ordinalzahl einer inkrementellen Zelle des Regenerators. Die oberen $f = 4$ Zeilen stehen für die Feststoffzellen, die unteren $g = 6$ Zeilen für die Gaszellen zur Verfügung. Die Spalten beschreiben in der Reihenfolge der Ordinalzahlen der thermischen Kopplungen die Energieflüsse zwischen den Zellen, indem die Zeile der entsprechenden Ausgangszelle „ -1 “ und die Zeile der entsprechenden Eingangszelle „ $+1$ “ enthält. Die ersten drei Spalten weisen die Kopplungen zwischen den Feststoffzellen, die restlichen Spalten die Kopplungen zwischen

Feststoff- und Gaszellen aus. Beachtenswert ist die Analogie zu elektrischen, hydraulischen und pneumatischen Systemen /12, 13, 14/.

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_f \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}}_g \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cccc} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \end{array} \right] \quad (8)$$

Das vorgeschlagene Modell des Regenerators erfordert die Separation der Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ in die obere Matrix der „instationären“ Feststoffzellen $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_f$ und die untere Matrix der „stationären“ Gaszellen $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_g$.

Für die treibenden Temperaturdifferenzen $\underline{\underline{\Delta\mathbf{T}}}$ der Energieflüsse zwischen den Zellen gilt unter Verwendung der transponierten Kopplungsmatrizen $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_f^T$ und $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_g^T$

$$\begin{bmatrix} \Delta T_1 \\ \Delta T_2 \\ \Delta T_3 \\ \Delta T_4 \\ \Delta T_5 \\ \Delta T_6 \\ \Delta T_7 \\ \Delta T_8 \\ \underline{\underline{\Delta\mathbf{T}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}}_f^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{f1} \\ T_{f2} \\ T_{f3} \\ T_{f4} \\ \underline{\underline{\mathbf{T}}}_f \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}}_g^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{g1} \\ T_{g2} \\ T_{g3} \\ T_{g4} \\ T_{g3} \\ T_{g4} \\ \underline{\underline{\mathbf{T}}}_g \end{bmatrix} \quad (9)$$

Das erste Fouriersche Gesetz formuliert die konduktiv transportierten Wärmeströme $\underline{\underline{\dot{\mathbf{Q}}}}$ als Funktion der treibenden Temperaturdifferenzen $\underline{\underline{\Delta\mathbf{T}}}$. Unter Verwendung einer Diagonalmatrix, der Leitwert-Matrix $\underline{\underline{\mathbf{L}}}$ mit den thermischen Leitwerten L der $l = 8$ Kopplungen, folgt in Matrixschreibweise

$$\begin{bmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \\ \dot{Q}_3 \\ \dot{Q}_4 \\ \dot{Q}_5 \\ \dot{Q}_6 \\ \dot{Q}_7 \\ \dot{Q}_8 \\ \underline{\underline{\dot{\mathbf{Q}}}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} L_{f1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{f2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{f3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{g1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_{g2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{g3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{g4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{g5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T_1 \\ \Delta T_2 \\ \Delta T_3 \\ \Delta T_4 \\ \Delta T_5 \\ \Delta T_6 \\ \Delta T_7 \\ \Delta T_8 \\ \underline{\underline{\Delta\mathbf{T}}} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Die zeitliche Änderung der inneren Energie der Feststoffzellen $\dot{\underline{\mathbf{U}}}_f$ ergibt sich für die einzelnen Feststoffzellen aus der Bilanz über zu- und abgeführte Wärmeströme $\dot{\underline{\mathbf{Q}}}$.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_{f1} \\ U_{f2} \\ U_{f3} \\ U_{f4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \\ \dot{Q}_3 \\ \dot{Q}_4 \\ \dot{Q}_5 \\ \dot{Q}_6 \\ \dot{Q}_7 \\ \dot{Q}_8 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt} \underline{\mathbf{U}}_f = \underline{\underline{\mathbf{K}}}_f \underline{\underline{\mathbf{Q}}}$$

Mit der Änderung der inneren Energie kommt es zu zeitlichen Temperaturänderungen in den Feststoffzellen.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} T_{f1} \\ T_{f2} \\ T_{f3} \\ T_{f4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_f \end{bmatrix}^{-1} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_{f1} \\ U_{f2} \\ U_{f3} \\ U_{f4} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\frac{d}{dt} \underline{\mathbf{T}}_f = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_f^{-1} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_f \underline{\underline{\mathbf{Q}}}$$

Durch Einführung der Übertragungsmatrizen $\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{ff}$ und $\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{fg}$ wird das beschreibende Differenzialgleichungssystem der Feststoffzellen stark vereinfacht und damit übersichtlicher.

$$\frac{d}{dt} \underline{\mathbf{T}}_f = -\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{ff} \underline{\mathbf{T}}_f + \underline{\underline{\mathbf{N}}}_{fg} \underline{\mathbf{T}}_g \quad (13)$$

Die Definitionen der Übertragungsmatrizen lauten:

$$\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{ff} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_f^{-1} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_f \underline{\underline{\mathbf{L}}}_f \underline{\underline{\mathbf{K}}}_f^T \quad \underline{\underline{\mathbf{N}}}_{fg} = -\underline{\underline{\mathbf{C}}}_f^{-1} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_f \underline{\underline{\mathbf{L}}}_f \underline{\underline{\mathbf{K}}}_g^T \quad (14)$$

Die Temperaturen der Gaszellen $\underline{\mathbf{T}}_g$ befinden sich voraussetzungsgemäß mit den Temperaturen der Feststoffzellen $\underline{\mathbf{T}}_f$ stets im stationären Zustand. Dadurch ist es möglich, die Gaszellentemperaturen $\underline{\mathbf{T}}_g$ über stationäre Bilanzgleichungen als Funktion der Feststoffzellen $\underline{\mathbf{T}}_f$ zu beschreiben.

Die Gasströme erfahren in den Gaszellen durch konduktiv eingetragene Wärmeströme $\dot{\underline{\mathbf{Q}}}$ Enthalpieänderungen $\underline{\underline{\Delta \dot{\mathbf{H}}}}_g$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \Delta \dot{H}_{g1} \\ \Delta \dot{H}_{g2} \\ \Delta \dot{H}_{g3} \\ \Delta \dot{H}_{g4} \\ \Delta \dot{H}_{g5} \\ \Delta \dot{H}_{g6} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \\ \dot{Q}_3 \\ \dot{Q}_4 \\ \dot{Q}_5 \\ \dot{Q}_6 \\ \dot{Q}_7 \\ \dot{Q}_8 \end{bmatrix} \\
\underline{\Delta \dot{H}}_g &= \underline{\underline{K}}_g \underline{\underline{\dot{Q}}}
\end{aligned} \tag{15}$$

Die Enthalpieänderungen der Gasströme $\underline{\Delta \dot{H}}_g$ bewirken in den Zellen Temperaturänderungen von den Eintrittstemperaturen \underline{T}_g^e zu den Ausgangstemperaturen \underline{T}_g

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} T_{g1} \\ T_{g2} \\ T_{g3} \\ T_{g4} \\ T_{g3} \\ T_{g4} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} T_{g1}^e \\ T_{g2}^e \\ T_{g3}^e \\ T_{g4}^e \\ T_{g3}^e \\ T_{g4}^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{C}_g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{C}_g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{C}_g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{C}_g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{C}_g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{C}_g \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta \dot{H}_{g1} \\ \Delta \dot{H}_{g2} \\ \Delta \dot{H}_{g3} \\ \Delta \dot{H}_{g4} \\ \Delta \dot{H}_{g5} \\ \Delta \dot{H}_{g6} \end{bmatrix} \\
\underline{T}_g &= \underline{T}_g^e + \underline{\underline{\dot{C}}}_g^{-1} \underline{\Delta \dot{H}}_g
\end{aligned} \tag{16}$$

Die Gaszellen sind über Gasströme miteinander konvektiv gekoppelt. Die Eintrittstemperaturen \underline{T}_g^e der Gasströme in die Gaszellen sind entweder Austrittstemperaturen \underline{T}_g vorgeschalteter Gaszellen oder Eintrittstemperaturen der Gasströme \underline{T}_g^e am Apparatteintritt. Mit der Strukturmatrix $\underline{\underline{S}}$ sowie der Inputmatrix $\underline{\underline{I}}$ wird die Verschaltung konvektiver thermischer Energieströme modelliert. Diese Matrizen bestehen größtenteils aus Nullen. Ein Element der Strukturmatrix $\mathbf{S}(i, j) = 1$ bedeutet, ein Gasstrom fließt von Gaszelle j nach Gaszelle i . Ein Element der Inputmatrix $\mathbf{I}(i, j) = 1$ bedeutet, der Gasstrom j tritt an der Gaszelle i in den Regenerator ein.

Beim Prozess der Speicheraufladung ordnet die Strukturmatrix $\underline{\underline{S}}^h$ die Austrittstemperaturen der Gaszellen \underline{T}_g und die Inputmatrix $\underline{\underline{I}}^h$ die Eintrittstemperaturen der heißen Gasströme \underline{T}_h^E den Eingängen \underline{T}_g^e der Gaszellen entsprechend der Strömungsrichtung zu

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} T_{g1}^e \\ T_{g2}^e \\ T_{g3}^e \\ T_{g4}^e \\ T_{g3}^e \\ T_{g4}^e \\ \underline{T}_g^e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{g1} \\ T_{g2} \\ T_{g3} \\ T_{g4} \\ T_{g3} \\ T_{g4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \underline{T}_h^E \\
\underline{\underline{T}}_g^e &= \underline{\underline{S}}^h \underline{T}_g + \underline{\underline{I}}^h \cdot \underline{T}_h^E
\end{aligned} \tag{17}$$

Analog erfolgt für den Prozess der Speicherentladung die Zuordnung der Austrittstemperaturen \underline{T}_g und der Eintrittstemperaturen der Gasströme \underline{T}_k^E zu den Eingängen der Zellen \underline{T}_g^e gemäß der entgegengesetzten Strömungsrichtung

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} T_{g1}^e \\ T_{g2}^e \\ T_{g3}^e \\ T_{g4}^e \\ T_{g3}^e \\ T_{g4}^e \\ \underline{\mathbf{T}}_g^e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{g1} \\ T_{g2} \\ T_{g3} \\ T_{g4} \\ T_{g3} \\ T_{g4} \\ \underline{\mathbf{T}}_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \underline{\mathbf{I}}^k \cdot \underline{\mathbf{T}}_k^E \end{bmatrix} \underline{\mathbf{T}}_k^E \quad (18) \\
\underline{\mathbf{T}}_g^e &= \underline{\mathbf{S}}^k \underline{\mathbf{T}}_g + \underline{\mathbf{I}}^k \cdot \underline{\mathbf{T}}_k^E
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Übertragungsmatrizen $\underline{\mathbf{N}}_{gf}$ und $\underline{\mathbf{N}}_{gg}$ ergibt sich aus den Gleichungen (15) bis (18) die nachfolgende vereinfachte Bilanzgleichung für die Gasströme

$$\underline{\mathbf{0}} = \underline{\mathbf{N}}_{gf} \underline{\mathbf{T}}_f - \underline{\mathbf{N}}_{gg} \underline{\mathbf{T}}_g - \underline{\mathbf{T}}_g + \underline{\mathbf{S}} \underline{\mathbf{T}}_g + \underline{\mathbf{I}} \underline{\mathbf{T}}_g^E \quad (19)$$

Die Definition der Übertragungsmatrizen für die Gaszellen $\underline{\mathbf{N}}_{gf}$ und $\underline{\mathbf{N}}_{gg}$ lautet

$$\underline{\mathbf{N}}_{gf} = -\dot{\underline{\mathbf{C}}}_g^{-1} \underline{\mathbf{K}}_f \underline{\mathbf{L}} \underline{\mathbf{K}}_f^T \quad \underline{\mathbf{N}}_{gg} = \dot{\underline{\mathbf{C}}}_g^{-1} \underline{\mathbf{K}}_g \underline{\mathbf{L}} \underline{\mathbf{K}}_g^T \quad (20)$$

Durch Umstellung nach den Austrittstemperaturen der Gaszellen $\underline{\mathbf{T}}_g$ und Vereinfachung mit den Matrizen der Betriebscharakteristiken $\underline{\Phi}_f$ und $\underline{\Phi}_g$ folgt

$$\underline{\mathbf{T}}_g = \left(\underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{N}}_{gg} - \underline{\mathbf{S}} \right)^{-1} \left(\underline{\mathbf{N}}_{gf} \underline{\mathbf{T}}_f + \underline{\mathbf{I}} \underline{\mathbf{T}}_g^E \right) = \underline{\Phi}_f \underline{\mathbf{T}}_f + \underline{\Phi}_g \underline{\mathbf{T}}_g^E \quad (21)$$

Die Betriebscharakteristik ist die dimensionslose Änderung der Gastemperatur innerhalb der Gaszelle /11/. Für eine einzelne Zelle gilt

$$\Phi = \frac{\alpha A}{\dot{C}_g + \alpha A} = \frac{N_g}{1 + N_g} \quad (22)$$

Die Matrizen der Betriebscharakteristiken $\underline{\Phi}_f$ und $\underline{\Phi}_g$ enthalten die „überlagerten“ Betriebscharakteristiken der Zellen gemäß ihrer Verschaltung und ergeben sich mathematisch aus nachfolgender Beziehung

$$\underline{\Phi}_f = \left(\underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{N}}_{gg} - \underline{\mathbf{S}} \right)^{-1} \underline{\mathbf{N}}_{gf} \quad \text{und} \quad \underline{\Phi}_g = \left(\underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{N}}_{gg} - \underline{\mathbf{S}} \right)^{-1} \underline{\mathbf{I}} \quad (23)$$

Für das beschreibende Differenzialgleichungssystem der Festzellen ergibt sich mit der „stationären“ Gasgleichung

$$\frac{d}{dt} \underline{\mathbf{T}}_f = - \left(\underline{\mathbf{N}}_{ff} - \underline{\mathbf{N}}_{fg} \underline{\Phi}_f \right) \underline{\mathbf{T}}_f + \underline{\mathbf{N}}_{fg} \underline{\Phi}_g \underline{\mathbf{T}}_g^E = \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{T}}_f + \underline{\mathbf{X}} \quad (24)$$

Die Beziehung (24) stellt ein gewöhnliches lineares Differenzialgleichungssystem dar, welches das instationäre Verhalten der Feststoffzellen beschreibt. Für lineare Systeme von Differenzialgleichungen existieren gemäß der Methode des Zustandsraums stets analytische Lösungen. Dieser Umstand eröffnet hervorragende Möglichkeiten für die Simulation von Regeneratoren.

2.3 Modell des Idealen Regenerators

Die vorangestellten Ausführungen beschreiben die instationären thermischen Eigenschaften eines Regenerators mit beliebiger Geometrie, d.h. einen Allgemeinen Regenerator. Eine im Gegensatz zum Allgemeinen Regenerator stehende Sonderstellung kommt dem **Idealen Regenerator** zu. Beim Idealen Regenerator ist jeder Feststoffzelle eine Gaszelle zugeordnet. Es treten keine Wärmeverluste an die Umgebung auf und es findet keine Wärmeleitung innerhalb des Feststoffes statt. Dieser Regenerator besteht aus vielen seriell verschalteten Kombinationen von Gas- und Feststoffzellen und wird nur von einem heißen bzw. kalten Gasstrom durchzogen. Die Abbildung 7 zeigt den Idealen Regenerator während des Aufladeprozesses mit einem heißen Prozessstrom

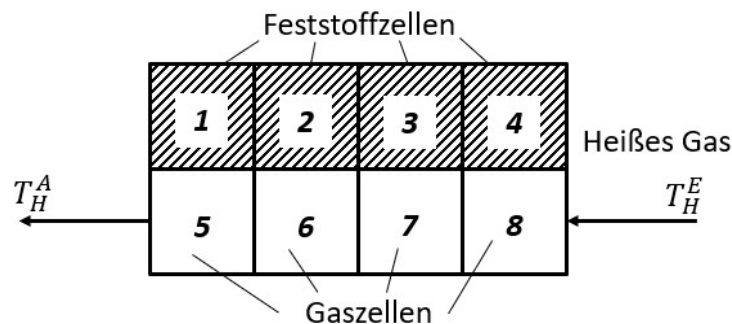


Abbildung 7: Idealer Regenerator im Aufladeprozess

Die Abbildung 8 zeigt den Idealen Regenerator während der Entladung mit einem kalten Prozessstrom

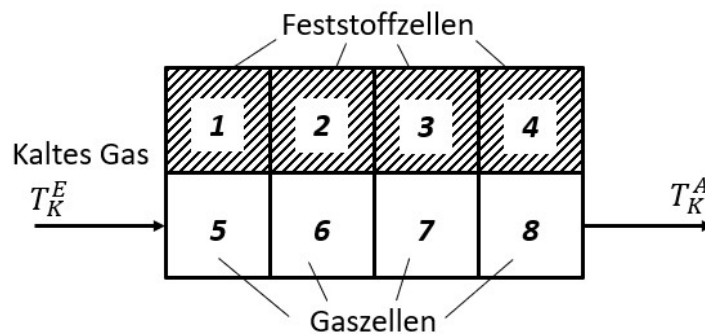


Abbildung 8: Idealer Regenerator im Entladeprozess

Da der Ideale Regenerator ein Sonderfall des Allgemeinen Regenerator ist, sind interessante Vereinfachungen der Modellgleichungen möglich. Für den **Idealen Regenerator** existieren „einfache Lösungsformeln“.

Die Kopplungsmatrix $\underline{\mathbf{K}}$ beschreibt die konduktiven Energieströme. Die Untermatrizen

$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_f$ und $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_g$ entsprechen Einheitsmatrizen mit positivem sowie negativem Vorzeichen.

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_f \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}}_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Da für die Untermatrizen $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_f = -\underline{\underline{\mathbf{K}}}_g$ gilt, weist die Übertragungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{ff}$ gemäß der Gleichungen (14) nur eine besetzte Hauptdiagonale auf

$$\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{ff} = \underline{\underline{\mathbf{N}}}_{fg} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_f^{-1} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_f \underline{\underline{\mathbf{L}}} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_f = \begin{bmatrix} N_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_f \end{bmatrix} \quad \text{mit } N_f = \frac{L}{C_f} \quad (26)$$

Das vereinfachte Differenzialgleichungssystem für die Feststoffzellen lautet

$$\frac{d}{dt} \underline{\underline{\mathbf{T}}}_f = -\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{ff} (\underline{\underline{\mathbf{T}}}_f - \underline{\underline{\mathbf{T}}}_g) \quad (27)$$

Die Übertragungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{gg}$ aus den Gleichungen (20) weist ebenfalls nur eine besetzte Hauptdiagonale auf

$$\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{gg} = \underline{\underline{\mathbf{N}}}_{gf} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_g^{-1} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_g \underline{\underline{\mathbf{L}}} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_g = \begin{bmatrix} N_g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_g \end{bmatrix} \quad \text{mit } N_g = \frac{L}{C_g} \quad (28)$$

Für die Strukturmatrix $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ einer Einheitsmatrix mit versetzter Diagonale und der Inputmatrix $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ mit nur einer Spalte gilt beim Aufladeprozess

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}}^h = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{I}}}^h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

sowie analog für den Entladevorgang

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}}^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{I}}}^k = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Das zusammengefasste „stationäre“ Bilanzgleichungssystem der Gaszellen lautet

$$\underline{\mathbf{0}} = \underline{\mathbf{N}}_{gg} \underline{\mathbf{T}}_f - \left(\underline{\mathbf{N}}_{gg} + \underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{S}} \right) \underline{\mathbf{T}}_g + \underline{\mathbf{I}} \underline{\mathbf{T}}_g^E \quad (31)$$

Nach entsprechender Umstellung folgt für den Vektor der stationären Temperaturen der Gaszellen

$$\underline{\mathbf{T}}_g = \underline{\Phi}_f \underline{\mathbf{T}}_f + \underline{\Phi}_g \underline{\mathbf{T}}_g^E \quad (32)$$

Für den Prozess der Aufladung lautet die Matrix der Betriebscharakteristiken der Feststoffzellen $\underline{\Phi}_f$

$$\underline{\Phi}_f^h = \left(\underline{\mathbf{N}}_{gg} + \underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{S}}^h \right)^{-1} \underline{\mathbf{N}}_{gg} = \begin{bmatrix} \Phi & \Phi(1-\Phi) & \Phi(1-\Phi)^2 & \Phi(1-\Phi)^3 \\ 0 & \Phi & \Phi(1-\Phi) & \Phi(1-\Phi)^2 \\ 0 & 0 & \Phi & \Phi(1-\Phi) \\ 0 & 0 & 0 & \Phi \end{bmatrix} \quad (33)$$

sowie der Matrix (im Sonderfall auch Vektor) mit den Betriebscharakteristiken $\underline{\Phi}_g^h$ der Gaszellen

$$\underline{\Phi}_g^h = \left(\underline{\mathbf{N}}_{gg} + \underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{S}}^h \right)^{-1} \underline{\mathbf{I}}^h = \begin{bmatrix} (1-\Phi)^4 \\ (1-\Phi)^3 \\ (1-\Phi)^2 \\ 1-\Phi \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \Phi = \frac{N_g}{1+N_g} \quad (34)$$

Analog gilt beim Prozess der Entladung für die Matrix der Betriebscharakteristiken $\underline{\Phi}_f^k$ der Feststoffzellen

$$\underline{\Phi}_f^k = \left(\underline{\mathbf{N}}_{gg} + \underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{S}}^k \right)^{-1} \underline{\mathbf{N}}_{gg} = \begin{bmatrix} \Phi & 0 & 0 & 0 \\ \Phi(1-\Phi) & \Phi & 0 & 0 \\ \Phi(1-\Phi)^2 & \Phi(1-\Phi) & \Phi & 0 \\ \Phi(1-\Phi)^3 & \Phi(1-\Phi)^2 & \Phi(1-\Phi) & \Phi \end{bmatrix} \quad (35)$$

sowie der Matrix (im Sonderfall ein Vektor) der Betriebscharakteristiken $\underline{\Phi}_g^k$

$$\underline{\Phi}_g^k = \left(\underline{\mathbf{N}}_{gg} + \underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{S}}^k \right)^{-1} \underline{\mathbf{I}}^k = \begin{bmatrix} 1-\Phi \\ (1-\Phi)^2 \\ (1-\Phi)^3 \\ (1-\Phi)^4 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \Phi = \frac{N_g}{1+N_g} \quad (36)$$

Die stationären Modelle der konvektiven thermischen Energieströme komplettieren die instationären Modelle der Feststoffzellen. Für den Aufladeprozess des Idealen Regenerators folgt

$$\frac{d}{dt} \underline{\mathbf{T}}_f = -\underline{\mathbf{N}}_{ff} \left(\underline{\mathbf{E}} - \underline{\Phi}^h \right) \underline{\mathbf{T}}_f + \underline{\mathbf{N}}_{ff} \underline{\Phi}^h \underline{\mathbf{T}}_g^h = \underline{\mathbf{M}}_h \underline{\mathbf{T}}_f + \underline{\mathbf{X}}_h \quad (37)$$

mit den Termen für die Modellmatrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_h$

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}_h = -\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{ff} \left(\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \underline{\underline{\Phi}}_g^h \right) = \begin{bmatrix} -N_f(1-\Phi) & N_f\Phi(1-\Phi) & N_f\Phi(1-\Phi)^2 & N_f\Phi(1-\Phi)^3 \\ 0 & -N_f(1-\Phi) & N_f\Phi(1-\Phi) & N_f\Phi(1-\Phi)^2 \\ 0 & 0 & -N_f(1-\Phi) & N_f\Phi(1-\Phi) \\ 0 & 0 & 0 & -N_f(1-\Phi) \end{bmatrix} \quad (38)$$

und den Eingangsvektor $\underline{\underline{\mathbf{X}}}_h$

$$\underline{\underline{\mathbf{X}}}_h = \underline{\underline{\mathbf{N}}}_{ff} \underline{\underline{\Phi}}_g^h = \begin{bmatrix} N_f(1-\Phi)^4 \\ N_f(1-\Phi)^3 \\ N_f(1-\Phi)^2 \\ N_f(1-\Phi) \end{bmatrix} \quad (39)$$

Analog gilt für den Entladeprozess des Idealen Regenerators

$$\frac{d}{dt} \underline{\underline{\mathbf{T}}}_f = -\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{ff} \left(\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \underline{\underline{\Phi}}_g^k \right) \underline{\underline{\mathbf{T}}}_f + \underline{\underline{\mathbf{N}}}_{ff} \underline{\underline{\Phi}}_g^k T_g^k = \underline{\underline{\mathbf{M}}}_k \underline{\underline{\mathbf{T}}}_f + \underline{\underline{\mathbf{X}}}_k \quad (40)$$

Die Terme für die Modellmatrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_k$ lauten

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}_k = -\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{ff} \left(\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \underline{\underline{\Phi}}_g^k \right) = \begin{bmatrix} -N_f(1-\Phi) & 0 & 0 & 0 \\ N_f\Phi(1-\Phi) & -N_f(1-\Phi) & 0 & 0 \\ N_f\Phi(1-\Phi)^2 & N_f\Phi(1-\Phi) & -N_f(1-\Phi) & 0 \\ N_f\Phi(1-\Phi)^3 & N_f\Phi(1-\Phi)^2 & N_f\Phi(1-\Phi) & -N_f(1-\Phi) \end{bmatrix} \quad (41)$$

Ebenso die Terme des Eingangsvektors $\underline{\underline{\mathbf{X}}}_k$

$$\underline{\underline{\mathbf{X}}}_k = \underline{\underline{\mathbf{N}}}_{ff} \underline{\underline{\Phi}}_g^k = \begin{bmatrix} N_f(1-\Phi) \\ N_f(1-\Phi)^2 \\ N_f(1-\Phi)^3 \\ N_f(1-\Phi)^4 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Die beschreibenden Differenzialgleichungssysteme (37) und (40) des Auf- bzw. Entladeprozesses beschreiben das dynamische Verhalten des Idealen Regenerators mathematisch exakt. Die dazu erforderlichen Matrizen weisen verallgemeinerungsfähige Strukturen auf und lassen entsprechende Lösungen der Differenzialgleichungen vermuten.

$$\frac{d}{dt} \underline{\underline{\mathbf{T}}}_f = -\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{ff} \left(\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \underline{\underline{\Phi}}_g \right) \underline{\underline{\mathbf{T}}}_f + \underline{\underline{\mathbf{N}}}_{fg} \underline{\underline{\Phi}}_g \underline{\underline{\mathbf{T}}}_g^E = \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\underline{\mathbf{T}}}_f + \underline{\underline{\mathbf{X}}} \quad (43)$$

Nachfolgend wird eine interessante und überraschend einfache Lösung für den Idealen Regenerator vorgestellt.

2.4 Regenerator als Speicher für thermische Energie

Es ist möglich Regeneratoren als Speicher für thermische Energie einzusetzen, indem zwischen Aufladung und Entladung eine längere Zeit des Verharrens liegt. Aufgrund der Ana-

logie zwischen einem Regenerator als Kurzzeitspeicher und einem thermischen Energiespeicher als Langzeitspeicher existieren für beide Apparate identische Ansätze der Modellierung.

Beispielsweise kann ein mit elektrischem Strom thermisch aufgeladener Speicher, die thermische Energie über eine längere Zeitspanne speichern und später an einen wärmeaufnehmenden Prozessstrom abgeben. Nachfolgend wird die entsprechende Modifizierung des Regeneratormodells gemäß der Abbildungen 7 und 8 vorgestellt.

Für die Modellierung des Speicherprozesses ist aufgrund längerer Zeitspannen des Verharrens die Berücksichtigung von Wärmeverlusten an die Umgebung sinnvoll. Dazu wird in die Kopplungsmatrix des Regenerators ein zusätzlicher Knoten (Zeile 11) für Umgebung eingeführt. Weiterhin entstehen vier zusätzliche thermische Kopplungen (Spalte 9 bis 12) zwischen den Feststoffzellen und der Umgebung. Kopplungen zwischen Gaszellen und der Umgebung wären ebenfalls möglich. Gleichung (44) zeigt die mit den Umgebungskopplungen $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_u$ erweiterte Kopplungsmatrix.

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_f \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}}_g \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}}_u \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & +1 & +1 \end{array} \right] \quad (44)$$

Die Leitfähigkeitsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{L}}}$ enthält entsprechend vier zusätzliche Leitwerte (Spalte 9 bis 12) für die Kopplungen der Festkörperzellen mit der Umgebung

$$\underline{\underline{\mathbf{L}}} = \left[\begin{array}{cccccccccccc} L_{f1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{f2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{f3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{g1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_{g2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{g3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{g4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{g5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{u1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{u2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{u3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{u4} \end{array} \right] \quad (45)$$

Infolge der Erweiterung des Allgemeinen Regeneratormodells existieren für den Speicher

drei Übertragungsmatrizen zur Beschreibung der instationären thermischen Eigenschaften der Feststoffzellen

$$\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{ff} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_f^{-1} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_f \underline{\underline{\mathbf{L}}} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_f^T \quad \underline{\underline{\mathbf{N}}}_{fg} = -\underline{\underline{\mathbf{C}}}_f^{-1} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_f \underline{\underline{\mathbf{L}}} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_g^T \quad \underline{\underline{\mathbf{N}}}_{fu} = -\underline{\underline{\mathbf{C}}}_f^{-1} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_f \underline{\underline{\mathbf{L}}} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_u^T \quad (46)$$

Ebenso beschreiben drei Übertragungsmatrizen die stationären thermischen Eigenschaften der Gaszellen

$$\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{gf} = -\underline{\underline{\dot{\mathbf{C}}}}_g^{-1} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_g \underline{\underline{\mathbf{L}}} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_f^T \quad \underline{\underline{\mathbf{N}}}_{gg} = \underline{\underline{\dot{\mathbf{C}}}}_g^{-1} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_g \underline{\underline{\mathbf{L}}} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_g^T \quad \underline{\underline{\mathbf{N}}}_{gu} = -\underline{\underline{\dot{\mathbf{C}}}}_g^{-1} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_g \underline{\underline{\mathbf{L}}} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_u^T \quad (47)$$

Aufgrund der praktisch unendlichen Wärmekapazität (d.h. $C_u \rightarrow \infty$) der Umgebung sind keine Übertragungsmatrizen für die Umgebung erforderlich.

Der elektrische Energieeintrag wird mit dem zeitlichen Temperaturanstieg $\Delta\dot{T}$ beschrieben

$$\Delta\dot{T} = \frac{P_{el}}{f \cdot C_f} \quad (48)$$

Das erweiterte System der Differenzialgleichungen für die Feststoffzellen lautet

$$\frac{d}{dt} \underline{\underline{\mathbf{T}}}_f = -\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{ff} \underline{\underline{\mathbf{T}}}_f + \underline{\underline{\mathbf{N}}}_{fg} \underline{\underline{\mathbf{T}}}_g + \underline{\underline{\mathbf{N}}}_{fu} \underline{\underline{\mathbf{T}}}_u + \underline{\underline{\Delta\dot{T}}} \quad (49)$$

Für die im thermischen Gleichgewicht mit den Feststoffzellen stehenden Gaszellen gilt

$$\underline{\underline{\mathbf{0}}} = \underline{\underline{\mathbf{N}}}_{gf} \underline{\underline{\mathbf{T}}}_f - \left(\underline{\underline{\mathbf{E}}} + \underline{\underline{\mathbf{N}}}_{gg} - \underline{\underline{\mathbf{S}}} \right) \underline{\underline{\mathbf{T}}}_g + \underline{\underline{\mathbf{I}}} \underline{\underline{\mathbf{T}}}_g^E + \underline{\underline{\mathbf{N}}}_{gu} \underline{\underline{\mathbf{T}}}_u \quad (50)$$

Nach Umstellung gilt für den Vektor der Gastemperaturen $\underline{\underline{\mathbf{T}}}_g$

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}_g = \left(\underline{\underline{\mathbf{E}}} + \underline{\underline{\mathbf{N}}}_{gg} - \underline{\underline{\mathbf{S}}} \right)^{-1} \left(\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{gf} \underline{\underline{\mathbf{T}}}_f + \underline{\underline{\mathbf{N}}}_{gu} \underline{\underline{\mathbf{T}}}_u + \underline{\underline{\mathbf{I}}} \underline{\underline{\mathbf{T}}}_g^E \right) = \underline{\underline{\Phi}}_f \underline{\underline{\mathbf{T}}}_f + \underline{\underline{\Phi}}_g \underline{\underline{\mathbf{T}}}_g^E + \underline{\underline{\Phi}}_u \underline{\underline{\mathbf{T}}}_u \quad (51)$$

Die endgültige Form der Differenzialgleichungen für die Feststoffzellen lautet

$$\frac{d}{dt} \underline{\underline{\mathbf{T}}}_f = - \left(\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{ff} - \underline{\underline{\mathbf{N}}}_{fg} \underline{\underline{\Phi}}_f \right) \underline{\underline{\mathbf{T}}}_f + \underline{\underline{\mathbf{N}}}_{fg} \underline{\underline{\Phi}}_g \underline{\underline{\mathbf{T}}}_g^E + \left(\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{fg} \underline{\underline{\Phi}}_u + \underline{\underline{\mathbf{N}}}_{fu} \right) \underline{\underline{\mathbf{T}}}_u + \underline{\underline{\Delta\dot{T}}} \quad (52)$$

Der stationäre Punkt wird mit folgender Beziehung beschrieben

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}_f^s = \left(\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{ff} - \underline{\underline{\mathbf{N}}}_{fg} \underline{\underline{\Phi}}_f \right)^{-1} \left(\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{fg} \underline{\underline{\Phi}}_g \underline{\underline{\mathbf{T}}}_g^E + \left(\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{fg} \underline{\underline{\Phi}}_u + \underline{\underline{\mathbf{N}}}_{fu} \right) \underline{\underline{\mathbf{T}}}_u + \underline{\underline{\Delta\dot{T}}} \right) \quad (53)$$

Die Matrizen $\underline{\underline{\Phi}}_f$, $\underline{\underline{\Phi}}_g$ und $\underline{\underline{\Phi}}_u$ enthalten die Betriebscharakteristiken der Zellen gemäß ihrer Verschaltung und ergeben sich mathematisch aus nachfolgender Beziehung

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Phi}}_f &= \left(\underline{\underline{\mathbf{E}}} + \underline{\underline{\mathbf{N}}}_{gg} - \underline{\underline{\mathbf{S}}} \right)^{-1} \underline{\underline{\mathbf{N}}}_{gf} \\ \underline{\underline{\Phi}}_g &= \left(\underline{\underline{\mathbf{E}}} + \underline{\underline{\mathbf{N}}}_{gg} - \underline{\underline{\mathbf{S}}} \right)^{-1} \underline{\underline{\mathbf{I}}} \\ \underline{\underline{\Phi}}_u &= \left(\underline{\underline{\mathbf{E}}} + \underline{\underline{\mathbf{N}}}_{gg} - \underline{\underline{\mathbf{S}}} \right)^{-1} \underline{\underline{\mathbf{N}}}_{gu} \end{aligned} \quad (54)$$

Während der Aufladung des Speichers findet keine Durchströmung des Speichers statt. Zur Bestimmung der Matrix der Betriebscharakteristiken $\underline{\Phi}_f$ ist unter bestimmten Umständen ein Grenzübergang der Art „ $\frac{0}{0}$ “ erforderlich.

Die beschreibenden Differenzialgleichungen für die Festzellen unterliegen der allgemeinen zusammengefassten Form

$$\frac{d}{dt}\underline{\mathbf{T}}_f = \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{T}}_f + \underline{\mathbf{X}} \quad (55)$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{M}} &= - \left(\underline{\mathbf{N}}_{ff} - \underline{\mathbf{N}}_{fg} \underline{\Phi}_f \right) \\ \underline{\mathbf{X}} &= \underline{\mathbf{N}}_{fg} \underline{\Phi}_g \underline{\mathbf{T}}_g^E + \left(\underline{\mathbf{N}}_{fg} \underline{\Phi}_u + \underline{\mathbf{N}}_{fu} \right) \underline{\mathbf{T}}_u + \underline{\Delta} \dot{\underline{\mathbf{T}}} \end{aligned} \quad (56)$$

Die Gleichung (56) zeigt ein allgemeines Modell für den thermischen Speicher ebenfalls auf Grundlage eines formal zu generierenden gewöhnlichen linearen Differenzialgleichungssystems. Dieses Differenzialgleichungssystem führt mit der Methode des Zustandsraums zu einer analytischen Lösung.

3 Allgemeine Lösung der Differenzialgleichungen für thermische Speicher und Regeneratoren

Die Modellierung des instationären Verhaltens von Regeneratoren ergibt Differenzialgleichungssysteme, deren auf Anfangs- und Randbedingungen basierenden Lösungen die Voraussetzung für Simulationen sind. Für die Lösung gewöhnlicher linearer ggf. linearisierter Differenzialgleichungen steht mit der Methode des Zustandsraumes ein hoch effektives Werkzeug zur Verfügung /1, 2, 3, 4, 5/, dessen Anwendung nachfolgend demonstriert wird.

Der Zustand eines Systems ist durch eine bestimmte Anzahl physikalischer Größen eindeutig charakterisiert. Diese Größen werden im Zustandsvektor $\underline{\mathbf{Z}}$ zusammengefasst. Die z systembeschreibenden Zustandsgrößen des Vektors $\underline{\mathbf{Z}}$ spannen den Zustandsraum auf. Jeder Punkt im z -dimensionalen Zustandsraum repräsentiert einen Zustand des Systems. Die Gestalt der Trajektorien im Zustandsraum d.h. der zeitliche Verlauf von Prozesspunkten eines instationären Systems gibt u.a. Aufschluss über Stabilität oder Instabilität des Prozesses. Die allgemeine mathematische Form der Methode des Zustandsraumes lautet

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\underline{\mathbf{Z}} &= \underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\mathbf{Z}} + \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{X}} \\ \underline{\mathbf{Y}} &= \underline{\mathbf{O}} \cdot \underline{\mathbf{Z}} + \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{X}} \end{aligned} \quad (57)$$

Die erste Gleichung beschreibt mit der Modellmatrix $\underline{\mathbf{M}}$ die inneren Zusammenhänge der Zustandsgrößen $\underline{\mathbf{Z}}$ sowie deren Abhängigkeit von den Eingangsgrößen $\underline{\mathbf{X}}$ über die Eingangsmatrix $\underline{\mathbf{A}}$. Die zweite Gleichung filtert mit der Ausgangsmatrix $\underline{\mathbf{O}}$ die Ausgangsgrößen $\underline{\mathbf{Y}}$ aus dem Zustandsvektor $\underline{\mathbf{Z}}$. Die Bypassmatrix $\underline{\mathbf{B}}$ formuliert unmittelbare Wirkungen des Eingangsvektors $\underline{\mathbf{X}}$ auf den Ausgangsvektor $\underline{\mathbf{Y}}$.

Für die Anwendung der Methode des Zustandsraumes auf die beschreibenden Differentialgleichungen eines Regenerators oder eines Speichers ist die vereinfachte Form von Gleichung (57) ausreichend.

$$\frac{d}{dt}\underline{\mathbf{Z}} = \underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\mathbf{Z}} + \underline{\mathbf{X}} \quad (58)$$

Eine wichtige Eigenschaft jedes Systems stellt der stationäre Punkt dar. Ein stabiler Prozess führt das System im Zustandsraum direkt oder auf einer „Spirale“ zu diesem Punkt. Ein instabiler Prozess entfernt das System direkt oder entlang einer „Spirale“ von diesem Punkt. Ein schwingendes System umkreist diesen Punkt „elliptisch“. Für den stationären Punkt des Systems gilt

$$\underline{\mathbf{Z}}^s = -\underline{\mathbf{M}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{X}} \quad (59)$$

Wie in der Regelungstechnik üblich, ist es günstig den Nullpunkt der Zustandsgrößen $\underline{\mathbf{Z}}$ in den stationären Punkt $\underline{\mathbf{Z}}^s$ zu verschieben und somit nur die Abweichung vom stationären Zustand $\underline{\mathbf{Z}}^s$ mit dem reduzierten Zustand $\underline{\mathbf{z}}$ zu behandeln. Durch diese Transformation entfällt der Eingangsvektor $\underline{\mathbf{X}}$. Für den reduzierten Zustandsvektor $\underline{\mathbf{z}}$ und dessen Ableitung gilt:

$$\underline{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{Z}} - \underline{\mathbf{Z}}^s \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}\underline{\mathbf{z}} = \frac{d}{dt}\underline{\mathbf{Z}} \quad (60)$$

Die Differentialgleichung (58) erhält mit Gleichungen (59) und (60) die reduzierte Form

$$\frac{d}{dt}\underline{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{M}} \cdot (\underline{\mathbf{z}} + \underline{\mathbf{Z}}^s) + \underline{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\mathbf{z}} \quad (61)$$

Gemäß der Methode des Zustandsraums existiert für lineare Differentialgleichungssysteme stets eine eindeutige analytische Lösung. Basis der Lösung per Zustandsraummethode besteht in der Zerlegung der Modellmatrix $\underline{\mathbf{M}}$ in Eigenvektoren und Eigenwerte. Die Eigenwerte dieser Matrix weisen die Informationen über das dynamische Verhalten des Systems sowie die mathematische Gestalt der Lösungsfunktionen aus. Hierbei tritt eine Besonderheit auf. Die „klassische“ Methode des Zustandsraumes geht von der Existenz unterschiedlicher Eigenwerte aus. Bei Vorhandensein identischer Eigenwerte versagt der Lösungsansatz. Ein nachfolgender Vorschlag für einen modifizierten Ansatz berücksichtigt diese Besonderheit. Im Falle verschiedener und einiger mehrfacher Eigenwerte sind beide Ansätze kombinierbar.

3.1 Differenzialgleichungssysteme mit ungleichen Eigenwerten

Die Lösung für m lineare Differentialgleichungen erfordert einen Ansatz mit m Exponentialfunktionen. Der Ansatz für die Lösungsgleichungen und deren Ableitungen lautet in Matrixschreibweise

$$\underline{\mathbf{z}}_t = \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{e}}^{\underline{\mathbf{A}}t} \cdot \underline{\mathbf{c}} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}\underline{\mathbf{z}}_t = \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{e}}^{\underline{\mathbf{A}}t} \cdot \underline{\mathbf{c}} \quad (62)$$

Die Eigenwertmatrix $\underline{\mathbf{A}}$ enthält auf der Hauptdiagonalen die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix $\underline{\mathbf{M}}$. Die Eigenwerte sind reell oder komplex.

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (63)$$

Die Exponentialmatrix $\underline{\underline{\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}}}$ enthält auf der Hauptdiagonalen die exponierten, mit einer Zeit t multiplizierten Eigenwerte λ . Je nach Art der Eigenwerte (reell, komplex, konjugiert komplex) entstehen Terme mit Exponentialfunktionen, trigonometrischen Funktionen sowie hyperbolischen Funktionen.

$$\underline{\underline{\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}}} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_4 t} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (64)$$

Die Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ füllen die Spalten der Eigen-Matrix $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$. Sie weisen reelle oder komplexe Werte auf

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & \dots \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & \dots \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & \dots \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (65)$$

Der Konstantenvektor $\underline{\underline{\mathbf{c}}}$ ist formaler Natur und dient der Parametrierung der Lösungsgleichungen

$$\underline{\underline{\mathbf{c}}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \dots \end{bmatrix} \quad (66)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (63) bis (65) in die Gleichung (62), wird die Evidenz des Ansatzes sichtbar

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{c}}} = \underline{\underline{\mathbf{M}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{c}}} \quad (67)$$

Nach Gleichung (67) erfordert die allgemeine Lösung eines linearen Differenzialgleichungssystems lediglich die Eigenwertzerlegung der Modellmatrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$. Die Eigenwerte $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ dieser Matrix sind die Lösungen ihrer Charakteristischen Gleichung, welche z.B. der Algorithmus nach Faddejew und Leverrier liefert. Die Eigenvektoren $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ sind Lösungen linearer Bestimmungsgleichungen.

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}^{-1} \quad (68)$$

Zur Bestimmung des Konstantenvektors $\underline{\mathbf{c}}$ wird der Zustandsvektor $\underline{\mathbf{z}}_0$ am Zeitpunkt $t = 0$ benötigt. Für $t = 0$ ergibt Gleichung (62)

$$\underline{\mathbf{z}}_0 = \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{c}} \quad (69)$$

Die Lösung der Differenzialgleichungen (61) ist auf das Produkt Matrix×Vektor zurückführbar. Da es sich um eine analytische Lösung handelt, übt die Zeitschrittweite t keinerlei Einfluss auf die Rechengenauigkeit aus und darf daher beliebige Werte annehmen

$$\underline{\mathbf{z}}_t = \underline{\mathbf{P}}_t \cdot \underline{\mathbf{z}}_0 \quad (70)$$

Für die Lösungsmatrix $\underline{\mathbf{P}}_t$ gilt:

$$\underline{\mathbf{P}}_t = \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{e}}^{\underline{\mathbf{A}}t} \cdot \underline{\mathbf{S}}^{-1} \quad (71)$$

Hinweis: Zwischen Gleichung (68) und Gleichung (71) besteht eine interessante Analogie! Mit Hilfe der Gleichungen (60) erfolgt die Rücktransformation. Die entstandene Beziehung zeigt die relative Bewegung der Zustandspunkte in Bezug zum stationären Punkt des Systems besonders deutlich.

$$\underline{\mathbf{z}}_t = \underline{\mathbf{P}}_t \cdot (\underline{\mathbf{z}}_0 - \underline{\mathbf{z}}^s) + \underline{\mathbf{z}}^s \quad (72)$$

Gleichung (72) beschreibt die exakte Änderung eines beliebigen Zustandsvektors $\underline{\mathbf{z}}_0$ von Beginn bis Ende des Zeitintervalls t zum Zustandsvektor $\underline{\mathbf{z}}_t$. - Prinzipiell ist immer die Entwicklung geschlossener analytischer Lösungen möglich. Leider gelingt dies nur für Sonderfälle. Meist sind die Terme der Lösungen sehr kompliziert und damit „unhandlich“.

3.2 Differenzialgleichungssysteme mit identischen Eigenwerten

Die Modellmatrix $\underline{\mathbf{M}}$ des Idealen Regenerators weist nur einen mehrfachen Eigenwert λ auf. In diesem Fall versagt der „klassische“ Ansatz infolge der Singularität von Bestimmungsgleichungen. Zur Abhilfe wird ein alternativer Ansatz vorgeschlagen. Dieser lautet

$$\underline{\mathbf{z}}_t = \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{e}}^{\underline{\mathbf{L}}t} \cdot \underline{\mathbf{c}} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}\underline{\mathbf{z}}_t = \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{L}} \cdot \underline{\mathbf{e}}^{\underline{\mathbf{L}}t} \cdot \underline{\mathbf{c}} \quad (73)$$

Die Eigenwertmatrix $\underline{\mathbf{L}}$ besteht in diesem Fall aus zwei Diagonalen. Die Hauptdiagonale sowie die untere Nebendiagonale sind mit dem einzigen Eigenwert λ besetzt.

$$\underline{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (74)$$

Für die Exponentialmatrix $\underline{\mathbf{e}}^{\underline{\mathbf{L}}t}$ ergibt sich eine mit Potenzfunktionen kombinierte Exponentialfunktion

$$\underline{\mathbf{e}}^{\underline{\mathbf{L}}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \lambda t e^{\lambda t} & e^{\lambda t} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\lambda^2 t^2}{2!} e^{\lambda t} & \lambda t e^{\lambda t} & e^{\lambda t} & 0 & \dots \\ \frac{\lambda^3 t^3}{3!} e^{\lambda t} & \frac{\lambda^2 t^2}{2!} e^{\lambda t} & \lambda t e^{\lambda t} & e^{\lambda t} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (75)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (74) und (75) in die Gleichung (73) ergibt sich die nachfolgende Gleichung

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}^{Lt}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{c}}} = \underline{\underline{\mathbf{M}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}^{Lt}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{c}}} \quad (76)$$

Aus der Gleichung (76) ergeben sich unmittelbar die Bestimmungsgleichungen für die Quasi-Eigenvektoren $\underline{\underline{\mathbf{S}}}_i$. Diese Vektoren $\underline{\underline{\mathbf{S}}}_i$ bilden die Spalten der Matrix der Eigenvektoren $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$.

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}^{-1} \quad (77)$$

Mit dem n -ten Eigenvektor d.h. der n -ten Spalte der Matrix $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ beginnend ist eine rekursive spaltenweise Ermittlung der Eigenmatrix $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ möglich. Analog zu Gleichung (71) folgt für die Lösungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$ mit der Exponentialmatrix von $\underline{\underline{\mathbf{L}}}$

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}^{Lt}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}^{-1} \quad (78)$$

Interessanterweise ist für den Sonderfall $\lambda = \text{const.}$ ausgehend von den Gleichungen (38) und (41) eine weitergehende analytische Behandlung bis zu einer „Endformel“ möglich. Beide Modellmatrizen der Differentialgleichungen für den Idealen Regenerator für die Aufladung $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_h$ und Entladung $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_k$ weisen den identischen Eigenwert λ auf

$$\lambda = -N_f (1 - \Phi) \quad (79)$$

Die Eigenmatrix $\underline{\underline{\mathbf{S}}}^h$ der Differentialgleichung für den Entladevorgang lautet gemäß der Gleichungen (33) und (77)

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}}^h = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\Phi^{-1} + \Phi^{-2} - \Phi^{-3} & -\Phi^{-2} & -\Phi^{-1} & 0 \\ -\Phi^{-2} + 2\Phi^{-3} & \Phi^{-2} & 0 & 0 \\ -\Phi^{-3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (80)$$

Für den Aufladevorgang ergibt sich für die Eigenmatrix $\underline{\underline{\mathbf{S}}}^k$ nach den Gleichungen (35) und (77)

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}}^k = \begin{bmatrix} -\Phi^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ -\Phi^{-2} + 2\Phi^{-3} & \Phi^{-2} & 0 & 0 \\ -\Phi^{-1} + \Phi^{-2} - \Phi^{-3} & -\Phi^{-2} & -\Phi^{-1} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (81)$$

Für die Lösungsmatrizen $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{t_A}^h$ und $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{t_E}^k$ folgt gemäß Gleichung (78) für den Aufladevorgang

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{t_A}^h = \begin{bmatrix} p_0 e^{-N_f(1-\Phi)t_A} & p_1 e^{-N_f(1-\Phi)t_A} & p_2 e^{-N_f(1-\Phi)t_A} & p_3 e^{-N_f(1-\Phi)t_A} \\ 0 & p_0 e^{-N_f(1-\Phi)t_A} & p_1 e^{-N_f(1-\Phi)t_A} & p_2 e^{-N_f(1-\Phi)t_A} \\ 0 & 0 & p_0 e^{-N_f(1-\Phi)t_A} & p_1 e^{-N_f(1-\Phi)t_A} \\ 0 & 0 & 0 & p_0 e^{-N_f(1-\Phi)t_A} \end{bmatrix} \quad (82)$$

und für den Entladevorgang

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{t_E}^k = \begin{bmatrix} p_0 e^{-N_f(1-\Phi)t_A} & 0 & 0 & 0 \\ p_1 e^{-N_f(1-\Phi)t_A} & p_0 e^{-N_f(1-\Phi)t_A} & 0 & 0 \\ p_2 e^{-N_f(1-\Phi)t_A} & p_1 e^{-N_f(1-\Phi)t_A} & p_0 e^{-N_f(1-\Phi)t_A} & 0 \\ p_3 e^{-N_f(1-\Phi)t_A} & p_2 e^{-N_f(1-\Phi)t_A} & p_1 e^{-N_f(1-\Phi)t_A} & p_0 e^{-N_f(1-\Phi)t_A} \end{bmatrix} \quad (83)$$

Für die Koeffizienten p_r der Lösungsmatrizen $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{t_A}^h$ und $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{t_E}^k$ gilt die „Endformel“ (84), mit welcher die Lösungsmatrizen besonders einfach parametrierbar sind.

$$p_r = (1 - \Phi)^r \sum_{i=1}^r \frac{1}{i!} \binom{r-1}{i-1} N_f^i \Phi^i t^i \quad (84)$$

Für die Zustandsgrößen gilt in gewohnter Weise

$$\underline{\mathbf{Z}}_t = \underline{\underline{\mathbf{P}}}_{t_A} \cdot (\underline{\mathbf{Z}}_0 - \underline{\mathbf{Z}}^s) + \underline{\mathbf{Z}}^s = \underline{\underline{\mathbf{P}}}_{t_A} \underline{\mathbf{Z}}_0 + \left(\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \underline{\underline{\mathbf{P}}}_{t_A} \right) \underline{\mathbf{Z}}^s \quad (85)$$

Die Bedeutung des Sonderfalls „Idealer Regenerator“ liegt weniger in der Simulation vorhandener Anlagen. Vielmehr repräsentiert dieser Sonderfall die Eigenschaften eines theoretischen Grenzfalles, welcher beispielsweise für Planungen interessant ist. Besonders hervorzuheben ist der äußerst geringe Programmieraufwand des Idealen Regenerators.

4 Simulation von thermischen Regeneratoren und Speichern

Die dargestellten Modelle mit den dazugehörigen Lösungen gestatten einfache und vor allem übersichtliche Simulationen für große Systeme mit sehr vielen Gleichungen. Modelle einzelner Prozessphasen sind modular in übergeordnete Prozess-Modelle einbettbar. Die erforderliche Kompatibilität der Modelle ist immer gegeben.

4.1 Simulation einzelner Teilprozesse von Regeneratoren

Jede Simulation eines Teilprozesses von Regeneratoren erfordert die Bestimmung der Lösungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\Delta t}$, deren Berechnung mit einer beliebig gewählten Zeitschrittweite Δt erfolgt. Weiterhin ist der stationäre Zustand der Feststoffzellen $\underline{\mathbf{T}}_f^s$ zu ermitteln. Existieren keine Verlustwärmeströme an die Umgebung, ist dies die Eintrittstemperatur des Gasstromes $\underline{\mathbf{T}}_g^E$. Ausgehend von einem beliebigen Anfangsvektor der Feststofftemperaturen $\underline{\mathbf{T}}_{f0}$, gelten für n Zeitschritte Δt die Gleichungen (72) bzw. (85). Die rekursive Anwendung dieser Gleichungen führt zur Ermittlung der Temperaturen der Feststoffzellen in zeitlicher Folge.

$$\begin{array}{llll} \text{Start} & t = 0 & \underline{\mathbf{T}}_{f0} & \\ 1. \text{ Zeitintervall} & t = \Delta t & \underline{\mathbf{T}}_{f1} & = \underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\Delta t} \cdot \underline{\mathbf{T}}_{f0} + \left(\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\Delta t} \right) \underline{\mathbf{T}}_f^s \\ 2. \text{ Zeitintervall} & t = 2\Delta t & \underline{\mathbf{T}}_{f2} & = \underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\Delta t} \cdot \underline{\mathbf{T}}_{f1} + \left(\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\Delta t} \right) \underline{\mathbf{T}}_f^s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n. \text{ Zeitintervall} & t = n\Delta t & \underline{\mathbf{T}}_{fn} & = \underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\Delta t} \cdot \underline{\mathbf{T}}_{fn-1} + \left(\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\Delta t} \right) \underline{\mathbf{T}}_f^s \end{array} \quad (86)$$

Diese zeitliche Folge des Temperatur-Vektors $\underline{\mathbf{T}}_{fi}$ ergibt im Zustandsraum Trajektorien, welche im Fall eines Regenerators streng konvergent in Richtung des stationären Punktes $\underline{\mathbf{T}}_f^s$ verlaufen.

Die Gaszellen befinden sich im stationären Gleichgewicht zu den Feststoffzellen. Mit Gleichung (32) bzw. (87) wird jedem Temperaturvektor der Gaszellen $\underline{\mathbf{T}}_f$ ein Temperaturvektor für die Gaszellen $\underline{\mathbf{T}}_g$ zugeordnet.

$$\underline{\mathbf{T}}_{gi} = \underline{\Phi}_f \underline{\mathbf{T}}_{fi} + \underline{\Phi}_g \underline{\mathbf{T}}_g^E \quad (87)$$

Die mathematisch exakte Simulation des dynamischen Verhaltens eines Regenerators ist somit auf einfache Matrizenrechnungen zurückgeführt.

4.2 Iterationsfreie Ermittlung quasistationärer Zustände bei zyklischen Prozessen

Zyklische Prozesse besitzen definitionsgemäß weder Anfang und noch Ende. Dadurch stehen keine bekannten Anfangsbedingungen für Simulationen zur Verfügung. Nachfolgend wird ein Berechnungsverfahren vorgestellt, welches die iterationslose Ermittlung bestimmter „Referenzpunkte“, wie die Temperaturprofile nach Aufladung und Entladung ermöglicht. Anschließend stehen diese „Referenzpunkte“ als Anfangsbedingungen für Simulationen zur Verfügung.

Jede Anwendung der Lösungsgleichungen für die dynamische Simulation eines Regenerators erfordert zunächst die Berechnung des stationären Endzustandes. Hierzu sind die Differenzialquotienten der Gleichungen (24), (43), (55) Null zu setzen und entsprechend nach dem Temperaturvektor der Feststoffzellen $\underline{\mathbf{T}}_f^s$ umzustellen. Für den Aufladevorgang gilt

$$\underline{\mathbf{T}}_h^s = -\underline{\mathbf{M}}_h^{-1} \underline{\mathbf{X}}_h \quad (88)$$

Analog gilt für den Entladevorgang

$$\underline{\mathbf{T}}_k^s = -\underline{\mathbf{M}}_k^{-1} \underline{\mathbf{X}}_k \quad (89)$$

Sämtliche Elemente der Vektoren mit den stationären Zuständen der Feststoffzellen $\underline{\mathbf{T}}_f^E$ enthalten bei Nichtberücksichtigung von Wärmeverlusten erwartungsgemäß für den Aufladevorgang die Eintrittstemperatur des wärmeabnehmenden Prozessstroms T_h^E und für den Entladevorgang die Eintrittstemperatur des wärmeaufgebenden Prozessstromes T_k^E .

Für den Aufladevorgang gelten die Gleichungen (72) bzw. (85). Sie beschreiben die Änderung des Temperaturvektors $\underline{\mathbf{T}}_f$ während der Aufladezeit t_A ausgehend von einem beliebigen Startzustand. Im Falle eines zyklischen Prozesses ist dies der Zustand nach der Entladung $\underline{\mathbf{T}}_f^k$ bis aufgeladenen Zustand $\underline{\mathbf{T}}_f^h$

$$\underline{\mathbf{T}}_f^h = \underline{\mathbf{P}}_{t_A}^h \cdot \underline{\mathbf{T}}_f^k + \left(\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{P}}_{t_A}^h \right) \underline{\mathbf{T}}_h^s \quad (90)$$

Beim Entladevorgang gelten ebenfalls die Gleichungen (72) und (85). Sie beschreiben die Änderung des Temperaturvektors $\underline{\mathbf{T}}_f$ während der Entladezeit t_E ausgehend von einem

beliebigen Startzustand. Im Falle eines zyklischen Prozesses ist dies der Endzustand der Aufladung $\underline{\mathbf{T}}_h$ bis zum Entladezustand $\underline{\mathbf{T}}_f^k$. Somit gilt

$$\underline{\mathbf{T}}_f^k = \underline{\mathbf{P}}_{t_E}^k \cdot \underline{\mathbf{T}}_f^h + \left(\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{P}}_{t_E}^k \right) \underline{\mathbf{T}}_k^s \quad (91)$$

Der zyklische Prozess des Entladens und Aufladens verläuft nach hinreichend vielen Zyklen nur noch zwischen zwei „Referenzpunkten“, einem identisch wiederkehrenden Temperaturprofil nach Aufladezeit und einem identisch wiederkehrenden Temperaturprofil nach der Entladezeit. Die Temperaturprofile der „Referenzpunkte“ sind unbekannte Anfangsbedingungen und gleichzeitig unbekannte Endbedingungen, welche nur von Randbedingungen der Auf- und Entladeprozesse abhängen. Da zwei Gleichungssysteme mit zwei unbekanntem Vektoren vorliegen sind die Anfangsbedingungen eindeutig bestimmbar. Hierzu existieren mehrere Möglichkeiten. Eine sehr übersichtliche Möglichkeit ist Lösung eines zusammengefassten linearen Gleichungssystems. Die Temperaturprofile der „Referenzpunkte“ sind mit folgendem Ansatz iterationslos ermittelbar.

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{T}}_f^h \\ \underline{\mathbf{T}}_f^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{E}} & -\underline{\mathbf{P}}_{t_A}^h \\ -\underline{\mathbf{P}}_{t_E}^k & \underline{\mathbf{E}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \left(\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{P}}_{t_A}^h \right) \underline{\mathbf{T}}_h^s \\ \left(\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{P}}_{t_E}^k \right) \underline{\mathbf{T}}_k^s \end{bmatrix} \quad (92)$$

Ausgehend von den „Referenzpunkten“, den quasistationären Zuständen zu Beginn und am Ende der zyklischen Auf- und Entladeprozesse, sind anschließend die Temperaturprofile des Regenerators für jeden Zeitpunkt nach Gleichung (86) bestimmbar.

Für einen Speicher mit drei Phasen für Aufladen, Verharren und Entladen gilt entsprechend

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{T}}_f^h \\ \underline{\mathbf{T}}_f^v \\ \underline{\mathbf{T}}_f^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{E}} & \underline{\mathbf{0}} & -\underline{\mathbf{P}}_{t_A}^h \\ -\underline{\mathbf{P}}_{t_R}^v & \underline{\mathbf{E}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & -\underline{\mathbf{P}}_{t_E}^k & \underline{\mathbf{E}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \left(\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{P}}_{t_A}^h \right) \underline{\mathbf{T}}_h^s \\ \left(\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{P}}_{t_R}^v \right) \underline{\mathbf{T}}_u \\ \left(\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{P}}_{t_E}^k \right) \underline{\mathbf{T}}_k^s \end{bmatrix} \quad (93)$$

Für das Modell eines Speichers auf Basis des Idealen Regenerators existiert ein interessanter Sonderfall. Beim Idealen Regenerator treten keine Wärmeverluste an die Umgebung auf. Ohne Verlustwärme steigt die Temperatur der Feststoffzellen linear. Damit liegt der stationäre Punkt bei $T_f^s \rightarrow \infty$. Mit der nachfolgenden Modifikation des Ansatzes (93) wird dieses Problem umgangen

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{T}}_f^h \\ \underline{\mathbf{T}}_f^v \\ \underline{\mathbf{T}}_f^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{E}} & \underline{\mathbf{0}} & -\underline{\mathbf{E}} \\ -\underline{\mathbf{P}}_{t_R}^v & \underline{\mathbf{E}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & -\underline{\mathbf{P}}_{t_E}^k & \underline{\mathbf{E}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{\Delta \dot{\mathbf{T}}} \cdot t_A \\ \left(\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{P}}_{t_R}^v \right) \underline{\mathbf{T}}_u \\ \left(\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{P}}_{t_E}^k \right) \underline{\mathbf{T}}_k^s \end{bmatrix} \quad (94)$$

Ausgehend von den ermittelten Referenzpunkten ist es möglich, die Temperaturprofile innerhalb der Betriebsphasen als Anfangswertproblem, gemäß der Gleichungen (86) zu simulieren. Dabei ist es günstig die Zeitschrittweite Δt derart zu wählen, dass sie ganzzahliger Teil der Zykluszeiten ist.

4.3 Beispiel: Idealer Regenerator

Die Berechnung des Idealen Regenerators erfordert den geringsten Aufwand. Hierbei sind für f Feststoffzellen lediglich f Koeffizienten zu berechnen, um mit diesen eine Matrix des Formates $2f \times 2f$ und ein Vektor mit dem Format $2f$ zu parametrieren. Diese Matrix und der Vektor bilden ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösung das gesuchte Temperaturprofil des Regenerators nach dem Auflade- und Entladeprozesses, d.h. in den quasistationären Zuständen ist.

Die technischen Daten des Beispiels gemäß der Bilder 7 und 8 lauten:

Zellenzahl	$n =$	8	–
Zahl der Feststoffzellen	$f =$	4	–
Zahl der Gaszellen	$g =$	4	–
Format der Inkrementwürfel	$s =$	0.1	m
Dichte Speichermaterial	$\rho =$	2500	kg m ⁻³
spezifische Wärmekapazität Speicher	$c_f =$	1.0	kJ kg ⁻¹ K ⁻¹
Massestrom des Gases	$\dot{m}_g =$	4.5	kg h ⁻¹
spezifische Wärmekapazität Gas	$c_g =$	1.0	kJ kg ⁻¹ K ⁻¹
Wärmeübergangskoeffizient Gas	$\alpha_0 =$	15	W m ⁻² K ⁻¹
Eintrittstemperatur Heissgas	$T_h^E =$	90	°C
Eintrittstemperatur Kaltgas	$T_k^E =$	10	°C
Auflade – bzw. Entladezeit	$t_z =$	7200	s

Die Berechnung der Apparatekonstanten sowie das Erstellen von Matrix und Vektor der Lösungsgleichung erfolgt nach dem vorgestellten Schema.

- Der thermische Leitwert L_g einer Gaszelle nach Gleichung 2

$$L_g = \alpha A = \frac{\alpha_0 s^2}{1 + \frac{\alpha_0 s}{2\lambda}} = \frac{60 \text{ W m}^{-2} \text{K}^{-1} \cdot 0.1^2 \text{m}^2}{1 + \frac{60 \text{ W m}^{-2} \text{K}^{-1} \cdot 0.1 \text{m}}{2 \cdot 1.0 \text{ W m}^{-1} \text{K}^{-1}}} = 0.15 \text{ W K}^{-1}$$

- Die Elemente der Übertragungsmatrix $\underline{\underline{N}}_{ff}$ nach Gleichung 6

$$N_f = \frac{L_g}{m_f c_f} = \frac{0.15 \text{ W K}^{-1}}{2.5 \text{ kg} \cdot 1000 \text{ J kg}^{-1} \text{K}^{-1}} = 0.00006 \text{ s}^{-1}$$

- Die Elemente der Übertragungsmatrix $\underline{\underline{N}}_{gg}$ nach Gleichung (7)

$$N_g = \frac{L_g}{\dot{m}_g c_g} = \frac{0.15 \text{ W K}^{-1}}{0.00125 \text{ kg s}^{-1} \cdot 1000 \text{ J kg}^{-1} \text{K}^{-1}} = 0.12$$

- Die Betriebscharakteristik Φ einer Gaszelle nach Gleichung (34) bzw. (36)

$$\Phi = \frac{N_g}{1 + N_g} = \frac{0.12}{1 + 0.12} = \frac{3}{28} = 0.10714$$

- Die Koeffizienten der Lösungsmatrix nach Gleichung (17), (18) und (84)

$$\underline{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} e^{-N_f(1-\Phi)t_z} = \begin{bmatrix} 0.67996 \\ 0.02810 \\ 0.02567 \\ 0.02345 \end{bmatrix}$$

- Die Koeffizienten des Lösungsvektors gemäß aufbereiteter Gleichung (85)

$$\underline{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - p_0 \\ 1 - p_0 - p_1 \\ 1 - p_0 - p_1 - p_2 \\ 1 - p_0 - p_1 - p_2 - p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.32004 \\ 0.29194 \\ 0.26627 \\ 0.24282 \end{bmatrix}$$

- Aufbau und Lösen des Gleichungssystems gemäß der Beziehung (92) zur Bestimmung des quasistationären Zustandes

$$\begin{bmatrix} T_{f1} \\ T_{f2} \\ T_{f3} \\ T_{f4} \\ T_{f1} \\ T_{f2} \\ T_{f3} \\ T_{f4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -p_0 & -p_1 & -p_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -p_0 & -p_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -p_0 \\ -p_0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -p_1 & -p_0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -p_2 & -p_1 & -p_0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -p_3 & -p_2 & -p_1 & -p_0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_3 T_h^e \\ v_2 T_h^e \\ v_1 T_h^e \\ v_0 T_h^e \\ v_0 T_k^e \\ v_1 T_k^e \\ v_2 T_k^e \\ v_3 T_k^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51.2 \\ 54.8 \\ 58.4 \\ 62.0 \\ 38.0 \\ 41.6 \\ 45.2 \\ 48.8 \end{bmatrix} \text{ } ^\circ\text{C}$$

- Die Ermittlung der Temperaturen der Gaszellen nach Gleichung (32)
 · zu Beginn des Aufladeprozesses

$$\Phi \begin{bmatrix} 1 & 1 - \Phi & (1 - \Phi)^2 & (1 - \Phi)^3 \\ 0 & 1 & 1 - \Phi & (1 - \Phi)^2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 - \Phi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 38.0 \\ 41.6 \\ 45.2 \\ 48.8 \end{bmatrix} \text{ } ^\circ\text{C} + \begin{bmatrix} (1 - \Phi)^4 \\ (1 - \Phi)^3 \\ (1 - \Phi)^2 \\ 1 - \Phi \end{bmatrix} 90^\circ\text{C} = \begin{bmatrix} 72.8 \\ 77.0 \\ 81.3 \\ 85.6 \end{bmatrix} \text{ } ^\circ\text{C}$$

· am Ende des Aufladeprozesses

$$\Phi \begin{bmatrix} 1 & 1 - \Phi & (1 - \Phi)^2 & (1 - \Phi)^3 \\ 0 & 1 & 1 - \Phi & (1 - \Phi)^2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 - \Phi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 51.2 \\ 54.8 \\ 58.4 \\ 62.0 \end{bmatrix} \text{ } ^\circ\text{C} + \begin{bmatrix} (1 - \Phi)^4 \\ (1 - \Phi)^3 \\ (1 - \Phi)^2 \\ 1 - \Phi \end{bmatrix} 90^\circ\text{C} = \begin{bmatrix} 77.6 \\ 80.8 \\ 83.9 \\ 87.0 \end{bmatrix} \text{ } ^\circ\text{C}$$

· zu Beginn des Entladeprozesses

$$\Phi \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 - \Phi & 1 & 0 & 0 \\ (1 - \Phi)^2 & 1 - \Phi & 1 & 0 \\ (1 - \Phi)^3 & (1 - \Phi)^2 & 1 - \Phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 51.2 \\ 54.8 \\ 58.4 \\ 62.0 \end{bmatrix} \text{ } ^\circ\text{C} + \begin{bmatrix} 1 - \Phi \\ (1 - \Phi)^2 \\ (1 - \Phi)^3 \\ (1 - \Phi)^4 \end{bmatrix} 10^\circ\text{C} = \begin{bmatrix} 14.4 \\ 18.7 \\ 23.0 \\ 27.2 \end{bmatrix} \text{ } ^\circ\text{C}$$

· am Ende des Entladeprozesses

$$\Phi \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 - \Phi & 1 & 0 & 0 \\ (1 - \Phi)^2 & 1 - \Phi & 1 & 0 \\ (1 - \Phi)^3 & (1 - \Phi)^2 & 1 - \Phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 38.0 \\ 41.6 \\ 45.2 \\ 48.8 \end{bmatrix} {}^{\circ}C + \begin{bmatrix} 1 - \Phi \\ (1 - \Phi)^2 \\ (1 - \Phi)^3 \\ (1 - \Phi)^4 \end{bmatrix} 10 {}^{\circ}C = \begin{bmatrix} 13.0 \\ 16.1 \\ 19.2 \\ 22.4 \end{bmatrix} {}^{\circ}C$$

Zur Berechnung des Idealen Regenerators ist Standardsoftware (z.B. VBA) ausreichend. Die Rechenzeit für ca. 1000 inkremelle Zellen beträgt ca. eine Minute. Bei Verwendung von Kompilaten liegt die Rechenzeit deutlich darunter.

4.4 Beispiel: Allgemeines Regeneratormodell

Mit dem allgemeinen Berechnungsmodell sind beliebige Apparatekonstruktionen behandelbar. Es basiert komplett auf dem Matrizenkalkül. Über die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix der Differentialgleichungen sind analytische Beziehungen ermittelbar. Diese ermöglichen Lösungen ohne Iterationen. Die nachfolgende Tabelle enthält die technologischen Daten des Beispiels gemäß der Abbildungen 5 und 6

<i>Zellenzahl</i>	$n = 10$	–
<i>Zahl der Feststoffzellen</i>	$f = 4$	–
<i>Zahl der Gaszellen</i>	$g = 6$	–
<i>Format der Inkrementwürfel</i>	$s = 0.1$	m
<i>Dichte Speichermaterial</i>	$\rho = 2500$	$kg\ m^{-3}$
<i>spezifische Wärmekapazität Speicher</i>	$c_f = 1.0$	$kJ\ kg^{-1}K^{-1}$
<i>spezifische Wärmeleitfähigkeit Speicher</i>	$\lambda = 1.0$	$W\ m^{-1}K^{-1}$
<i>Massestrom des Gases</i>	$\dot{m}_g = 4.5$	$kg\ h^{-1}$
<i>spezifische Wärmekapazität Gas</i>	$c_g = 1.0$	$kJ\ kg^{-1}K^{-1}$
<i>Wärmeübergangskoeffizient Gas</i>	$\alpha_0 = 60$	$W\ m^{-2}K^{-1}$
<i>Eintrittstemperatur Heissgas</i>	$T_h^E = 90$	$^{\circ}C$
<i>Eintrittstemperatur Kaltgas</i>	$T_k^E = 10$	$^{\circ}C$
<i>Auflade – bzw. Entladezeit</i>	$t_z = 7200$	s

- Für die thermischen Leitwerte L_f der konduktiven Kopplungen zwischen den Festkörperzellen „ f “ gilt nach Gleichung (1)

$$L_f = \lambda s = 1.0\ W\ m^{-1}K^{-1} \cdot 0.1\ m = 0.10\ W\ K^{-1}$$

- Für die thermischen Leitwerte L_g der konduktiven Kopplungen zwischen Gas- und Festkörperzellen „ g “ folgt gemäß Gleichung (2)

$$L_g = \frac{\alpha_0 s^2}{1 + \frac{\alpha_0 s}{2\lambda}} = \frac{60\ W\ m^{-2}K^{-1} \cdot 0.1^2 m^2}{1 + \frac{60\ W\ m^{-2}K^{-1} \cdot 0.1 m}{2 \cdot 1.0\ W\ m^{-1}K^{-1}}} = 0.15\ W\ K^{-1}$$

- Die Diagonalmatrix $\underline{\underline{\mathbf{L}}}$ enthält gemäß (10) drei Leitwerte vom Typ „ ff “ und fünf Leitwerte vom Typ „ gf “

$$\underline{\underline{\mathbf{L}}} = \begin{bmatrix} 0.10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.15 \end{bmatrix} \frac{W}{K}$$

- Unter Verwendung der Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ nach Gleichung (8) folgen die Übertragungsmatrizen der Feststoffzellen nach Gleichung (14)

$$\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{ff} = \begin{bmatrix} 0.360 & -0.144 & 0 & 0 \\ -0.144 & 0.504 & -0.144 & 0 \\ 0 & -0.144 & 0.504 & -0.144 \\ 0 & 0 & -0.144 & 0.576 \end{bmatrix} h^{-1}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{fg} = \begin{bmatrix} 0.216 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.216 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.216 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.216 & 0 & 0.216 \end{bmatrix} h^{-1}$$

- Analog gilt Gleichung (20) für die Übertragungsmatrizen der Gaszellen:

$$\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{gf} = \begin{bmatrix} 0.12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.12 \end{bmatrix} (-)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{gg} = \begin{bmatrix} 0.12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.12 \end{bmatrix} (-)$$

- Mit der Strukturmatrix $\underline{\underline{\mathbf{S}}}_h$ und der Inputmatrix $\underline{\underline{\mathbf{I}}}_h$ (Gleichung (17)) folgen die Matrizen für die Betriebscharakteristiken $\underline{\underline{\Phi}}_f^h$ und $\underline{\underline{\Phi}}_g^h$ aus den Gleichungen (23) für den Aufladevorgang

$$\underline{\underline{\Phi}}_f^h = \begin{bmatrix} 0.10714 & 0.09566 & 0.08541 & 0.14435 \\ 0 & 0.10714 & 0.09566 & 0.16168 \\ 0 & 0 & 0.10714 & 0.18108 \\ 0 & 0 & 0 & 0.20281 \\ 0 & 0 & 0 & 0.10714 \\ 0 & 0 & 0 & 0.10714 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\Phi}}_g^h = \begin{bmatrix} 0.56743 \\ 0.63552 \\ 0.71178 \\ 0.79719 \\ 0.89286 \\ 0.89286 \end{bmatrix}$$

- Analog folgen mit der Strukturmatrix $\underline{\underline{S}}_k$ und der Inputmatrix $\underline{\underline{I}}_k$ (Gleichung (18)) die Matrizen der Betriebscharakteristiken $\underline{\underline{\Phi}}_f^k$ und $\underline{\underline{\Phi}}_g^k$ des Entladeprozesses aus Gleichung (23)

$$\underline{\underline{\Phi}}_f^k = \begin{bmatrix} 0.10714 & 0 & 0 & 0 \\ 0.09566 & 0.10714 & 0 & 0 \\ 0.08541 & 0.09566 & 0.10714 & 0 \\ 0.07626 & 0.08541 & 0.09566 & 0.10714 \\ 0.07626 & 0.08541 & 0.09566 & 0.10714 \\ 0.06809 & 0.07626 & 0.08541 & 0.20281 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\Phi}}_g^k = \begin{bmatrix} 0.89286 \\ 0.79719 \\ 0.71178 \\ 0.63552 \\ 0.63552 \\ 0.56743 \end{bmatrix}$$

- Die Differentialgleichungen der Feststoffzellen gemäß Gleichung (24) lauten
 · Für den Aufladevorgang gilt

$$\underline{\underline{M}}_h = \begin{bmatrix} -0.33686 & 0.16466 & 0.01845 & 0.03118 \\ 0.14400 & -0.48086 & 0.16466 & 0.03492 \\ 0 & 0.14400 & -0.48086 & 0.18311 \\ 0 & 0 & 0.14400 & -0.50905 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{X}}_h = \begin{bmatrix} 0.12256 \\ 0.13727 \\ 0.15374 \\ 0.36505 \end{bmatrix}$$

· Analog gilt für Entladeprozess

$$\underline{\underline{M}}_k = \begin{bmatrix} -0.33686 & 0.14400 & 0 & 0 \\ 0.16466 & -0.48086 & 0.14400 & 0 \\ 0.01845 & 0.16466 & -0.48086 & 0.14400 \\ 0.03118 & 0.03492 & 0.18311 & -0.50905 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{X}}_k = \begin{bmatrix} 0.19286 \\ 0.17219 \\ 0.15374 \\ 0.25984 \end{bmatrix}$$

- Gemäß Gleichung (68) erfahren die Modellmatrizen $\underline{\underline{M}}_h$ und $\underline{\underline{M}}_k$ die Zerlegung in Eigenvektoren $\underline{\underline{S}}$ und Eigenwerte $\underline{\underline{\Lambda}}$

· Für den Aufladeprozess gilt die Eigen-Matrix $\underline{\underline{S}}_h$

$$\underline{\underline{S}}_h = \begin{bmatrix} 0.70206 & 0.75151 & 0.42278 & 0.23461 \\ 0.57465 & 0.09350 & -0.65449 & -0.53527 \\ 0.38446 & -0.48905 & -0.19578 & 0.67068 \\ 0.17053 & -0.43281 & 0.59546 & -0.45676 \end{bmatrix}$$

· analog gilt für den Entladeprozess die Matrix der Eigenvektoren $\underline{\underline{S}}_k$

$$\underline{\underline{S}}_k = \begin{bmatrix} 0.51129 & 0.50997 & 0.38731 & 0.19820 \\ 0.54131 & -0.03357 & -0.59048 & -0.52802 \\ 0.52975 & -0.61449 & -0.13315 & 0.65205 \\ 0.40613 & -0.60100 & 0.69541 & -0.50670 \end{bmatrix}$$

- Die Eigenwerte $\underline{\underline{\Lambda}}$ für Auf- und Entladeprozess sind identisch.

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \begin{bmatrix} -0.18441 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.34634 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.55639 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.72049 \end{bmatrix} h^{-1}$$

- Zur Berechnung der Lösungsmatrix wird die exponierte Eigenwertmatrix $\underline{\underline{e^{\Lambda \cdot t_z}}}$ verwendet. Für eine Auf- und Entladezeit von $t_z = 2 h$ gilt

$$\underline{\underline{e^{\Lambda \cdot t_z}}} = \begin{bmatrix} 0.69156 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.50024 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.32864 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.23670 \end{bmatrix}$$

- Mit Gleichung (92) ergibt sich die Lösungsmatrix $\underline{\underline{M}}^s$ zur Ermittlung des quasistationären Zustandes. Interessanterweise handelt es sich bei den Untermatrizen $\underline{\underline{P}}_{t_z}^h$ und $\underline{\underline{P}}_{t_z}^k$ um Transponierte

$$\underline{\underline{M}}^s = - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0.5324 & 0.1531 & 0.0448 & 0.0383 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0.1316 & 0.4218 & 0.1389 & 0.0546 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0.0179 & 0.1157 & 0.4216 & 0.1450 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0.0016 & 0.0160 & 0.1107 & 0.3814 \\ 0.5324 & 0.1316 & 0.0179 & 0.0016 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1531 & 0.4218 & 0.1157 & 0.0160 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0.0448 & 0.1389 & 0.4216 & 0.1107 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0.0383 & 0.0546 & 0.1450 & 0.3814 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Ebenfalls aus Gleichung (92) folgen der entsprechende Lösungsvektor $\underline{\underline{V}}^s$ sowie der Temperaturvektor $\underline{\underline{T}}_f^s$ des quasistationären Zustandes

$$\underline{\underline{V}}^s = \begin{bmatrix} 0.2314 \cdot T_h^s \\ 0.2531 \cdot T_h^s \\ 0.2998 \cdot T_h^s \\ 0.4903 \cdot T_h^s \\ 0.3165 \cdot T_k^s \\ 0.2934 \cdot T_k^s \\ 0.2840 \cdot T_k^s \\ 0.3807 \cdot T_k^s \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{T}}_f^s = \begin{bmatrix} \underline{\underline{T}}_f^h \\ \underline{\underline{T}}_f^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51.2 \\ 53.6 \\ 57.0 \\ 65.7 \\ 38.6 \\ 41.0 \\ 43.9 \\ 42.0 \end{bmatrix} \text{ } ^\circ\text{C}$$

- Die Zustandsvektoren $\underline{\underline{T}}_f^h$ und $\underline{\underline{T}}_f^k$ sind Anfangsbedingungen für den Auflade- und Entladeprozess des Regenerators. Somit ist es möglich diese Prozesse in beliebiger Zeitaufösung zu simulieren. Für die Zeitschrittweite $\Delta t = 0.25 h$ folgt mit Gleichung (64) die exponierte Eigenwertmatrix

$$\underline{\underline{e^{\Lambda \cdot \Delta t}}} = \begin{bmatrix} 0.95495 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.91706 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.87014 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.83517 \end{bmatrix}$$

- Simulation des Aufladeprozesses mittels Lösungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{h\Delta t}$
 - Lösungsmatrix gemäß Gleichung (71)

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\Delta t}^h = \begin{bmatrix} 0.91991 & 0.03726 & 0.00506 & 0.00728 \\ 0.03252 & 0.88806 & 0.03675 & 0.00868 \\ 0.00058 & 0.03195 & 0.88812 & 0.04061 \\ 0.00001 & 0.00057 & 0.03183 & 0.88123 \end{bmatrix}$$

- Die Zeitreihen der Temperaturen der Feststoffzellen $\underline{\mathbf{T}}_f$ mit Gleichung (72)

t	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	h
T_{f1}	38.6	40.3	42.0	43.6	45.2	46.8	48.3	49.8	51.2	$^{\circ}C$
T_{f2}	41.0	42.7	44.4	46.0	47.6	49.1	50.7	52.1	53.6	$^{\circ}C$
T_{f3}	43.9	45.5	47.2	48.8	50.5	52.2	53.8	55.5	57.0	$^{\circ}C$
T_{f4}	42.0	46.2	50.0	53.4	56.4	59.1	61.5	63.7	65.7	$^{\circ}C$

- Die „stationär“ modellierten Temperaturen der Gaszellen folgen aus Gleichung (21)

t	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	h
T_{g1}	68.9	70.0	71.1	72.0	72.9	73.8	74.6	75.3	76.0	$^{\circ}C$
T_{g2}	72.6	73.6	74.5	75.4	76.2	77.0	77.7	78.4	79.0	$^{\circ}C$
T_{g3}	76.4	77.3	78.2	79.0	79.7	80.4	81.0	81.5	82.1	$^{\circ}C$
T_{g4}	80.3	81.1	81.9	82.6	83.2	83.7	84.2	84.7	85.1	$^{\circ}C$
T_{g5}	84.9	85.3	85.7	86.1	86.4	86.7	86.9	87.2	87.4	$^{\circ}C$
T_{g6}	84.9	85.3	85.7	86.1	86.4	86.7	86.9	87.2	87.4	$^{\circ}C$

- Simulation des Entladeprozesses

- Die Lösungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\Delta t}^k$ für die Entladung gemäß Gleichung (71)

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}}_{\Delta t}^k = \begin{bmatrix} 0.91991 & 0.03252 & 0.00058 & 0.00001 \\ 0.03726 & 0.88805 & 0.03195 & 0.00057 \\ 0.00506 & 0.03675 & 0.88812 & 0.03183 \\ 0.00728 & 0.00868 & 0.04061 & 0.88123 \end{bmatrix}$$

- Die Zeitreihen der Temperaturen der Feststoffzellen $\underline{\mathbf{T}}_f$ mit Gleichung (72) lauten

t	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	h
T_{f1}	51.2	49.4	47.6	45.9	44.3	42.8	41.3	39.9	38.6	$^{\circ}C$
T_{f2}	53.6	51.8	50.0	48.4	46.8	45.3	43.8	42.4	41.0	$^{\circ}C$
T_{f3}	57.0	55.3	53.6	52.0	50.3	48.6	47.0	45.4	43.9	$^{\circ}C$
T_{f4}	65.7	61.7	58.1	54.7	51.7	49.0	46.5	44.2	42.0	$^{\circ}C$

· Für die „stationär“ modellierten Temperaturen der Gaszellen \underline{T}_g gilt Gleichung (21)

t	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	h
T_{g1}	14.4	14.2	14.0	13.8	13.7	13.5	13.4	13.2	13.1	$^{\circ}C$
T_{g2}	18.6	18.2	17.9	17.5	17.2	16.9	16.6	16.3	16.1	$^{\circ}C$
T_{g3}	22.7	22.2	21.7	21.2	20.8	20.3	19.9	19.5	19.0	$^{\circ}C$
T_{g4}	27.3	26.4	25.6	24.8	24.1	23.4	22.7	22.1	21.5	$^{\circ}C$
T_{g5}	27.3	26.4	25.6	24.8	24.1	23.4	22.7	22.1	21.5	$^{\circ}C$
T_{g6}	31.4	30.2	29.1	28.0	27.0	26.1	25.3	24.5	23.7	$^{\circ}C$

Die Exaktheit der erhaltenen Lösungen der Zustände ist leicht mit dem Energieerhaltungssatz und dem Transportgesetz für thermische Energie nachprüfbar. Abweichungen der Bilanzen liegen im Bereich der „Rechnerungenauigkeit“.

4.5 Beispiel: Thermischer Speicher

Ein thermischer Speicher wird elektrisch beladen, verharrt im aufgeladenen Zustand und wird mit einem Kaltgasstrom entladen, um anschließend wieder elektrisch aufgeladen zu werden. Die Prozess-, Konstruktions-, und Stoffdaten befinden sich in der nachfolgenden Tabelle

Zellenzahl	$n = 8$	–
Zahl der Feststoffzellen	$f = 4$	–
Zahl der Gaszellen	$g = 4$	–
Format der Inkrementwürfel	$s = 0.1$	m
Dichte Speichermaterial	$\rho = 2500$	$kg\ m^{-3}$
spezifische Wärmekapazität Speicher	$c_f = 1.0$	$kJ\ kg^{-1}K^{-1}$
Massestrom des Gases	$\dot{m}_g = 4.5$	$kg\ h^{-1}$
spezifische Wärmekapazität Gas	$c_g = 1.0$	$kJ\ kg^{-1}K^{-1}$
Wärmeübergangskoeffizient Gas	$\alpha_0 = 15$	$W\ m^{-2}K^{-1}$
Wärmeübergangskoeffizient Umgebung	$\alpha_u = 0.1$	$W\ m^{-2}K^{-1}$
elektrische Heizleistung	$P = 0.15$	kW
Eintrittstemperatur Kaltgas	$T_k^E = 10$	$^{\circ}C$
Umgebungstemperatur	$T_u = 5$	$^{\circ}C$
Aufladezeit	$t_A = 1800$	s
Verharrungszeit	$t_R = 9000$	s
Entladezeit	$t_E = 7200$	s

Basis des Modells für den thermischen Speicher ist die Kopplungsmatrix $\underline{\mathbf{K}}$ (Gleichung (44)) und die mit den Leitwerten L_i parametrisierten Leitfähigkeitsmatrix $\underline{\mathbf{L}}$ (45). Die Prozessschritte im Einzelnen:

- Aufladen des thermischen Speichers

· Die Übertragungsmatrizen der Festkörperzellen nach Gleichung (46) lauten

$$\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{ff} = \begin{bmatrix} 0.3744 & -0.1440 & 0 & 0 \\ -0.1440 & 0.5184 & -0.1440 & 0 \\ 0 & -0.1440 & 0.5184 & -0.1440 \\ 0 & 0 & -0.1440 & 0.5904 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{N}}}_{fu} = \begin{bmatrix} 0.1440 \\ 0.1440 \\ 0.1440 \\ 0.1440 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{fg} = \begin{bmatrix} 0.2160 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2160 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2160 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2160 & 0 & 0.2160 \end{bmatrix}$$

· Die Grenzwerte der Betriebscharakteristiken $\underline{\underline{\Phi}}_f$, $\underline{\underline{\Phi}}_g$ und $\underline{\underline{\Phi}}_u$ für $\dot{m}_g \rightarrow 0$

$$\underline{\underline{\Phi}}_f = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\Phi}}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\Phi}}_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

· Die Koeffizientenmatrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ sowie der Eingangsvektor $\underline{\underline{\mathbf{X}}}$ des Differentialgleichungssystems mit Gleichung (56) ermittelt

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}_A = \begin{bmatrix} -0.1584 & 0.1440 & 0 & 0 \\ 0.1440 & -0.3024 & 0.1440 & 0 \\ 0 & 0.1440 & -0.3024 & 0.1440 \\ 0 & 0 & 0.1440 & -0.1584 \end{bmatrix} h^{-1}$$

· Der Eingangsvektor $\underline{\underline{\mathbf{X}}}$ und der stationäre Zustand für $t \rightarrow \infty$

$$\underline{\underline{\mathbf{X}}}_A = \begin{bmatrix} 54.0144 \\ 54.0144 \\ 54.0144 \\ 54.0144 \end{bmatrix} h^{-1} \quad \underline{\underline{\mathbf{T}}}_f^s = \begin{bmatrix} 3755.0 \\ 3755.0 \\ 3755.0 \\ 3755.0 \end{bmatrix} \text{ } ^\circ C$$

· Die Eigenwertmatrix $\underline{\underline{\Lambda}}$ gemäß Gleichung (68)

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \begin{bmatrix} -0.09875 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.01440 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.30240 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.50601 \end{bmatrix} h^{-1}$$

· Die Matrix der Eigenvektoren $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ nach Gleichung (68)

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}}_A = \begin{bmatrix} 0.65328 & 0.50000 & 0.50000 & 0.27060 \\ 0.27060 & 0.50000 & -0.50000 & -0.65328 \\ -0.27060 & 0.50000 & -0.50000 & 0.65328 \\ -0.65328 & 0.50000 & 0.50000 & -0.27060 \end{bmatrix}$$

- Die exponentierte Matrix der Eigenwerte $\underline{\underline{e^{\Lambda \cdot t_A}}}$

$$\underline{\underline{e^{\Lambda \cdot t_A}}} = \begin{bmatrix} 0.95182 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.99283 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.85968 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.77645 \end{bmatrix}$$

- Die „Aufladematrix“ $\underline{\underline{P}}_A$ gemäß Gleichung (71) lautet (interessanter Weise ist diese Matrix symmetrisch)

$$\underline{\underline{P}}_A = \begin{bmatrix} 0.92620 & 0.06429 & 0.00229 & 0.00006 \\ 0.06429 & 0.86419 & 0.06206 & 0.00229 \\ 0.00229 & 0.06206 & 0.85968 & 0.06429 \\ 0.00006 & 0.00229 & 0.06429 & 0.92620 \end{bmatrix}$$

- Das Verharren des Speichers wird mit dem Modell der Aufladung simuliert. Lediglich der Temperaturanstieg ist Null d.h. $\dot{T} = 0$. Somit ist die Koeffizientenmatrix $\underline{\underline{M}}$ unverändert

- Es existiert ein modifizierter Eingangsvektor $\underline{\underline{X}}$ mit einem anderen stationären Punkt $\underline{\underline{T}}_f^s$ im Zustandsraum

$$\underline{\underline{X}}_R = \begin{bmatrix} 0.0144 \\ 0.0144 \\ 0.0144 \\ 0.0144 \end{bmatrix} h^{-1} \quad \underline{\underline{T}}_f^s = \begin{bmatrix} 5.0 \\ 5.0 \\ 5.0 \\ 5.0 \end{bmatrix} ^\circ C$$

- Die exponentierte Matrix der Eigenwerte $\underline{\underline{e^{\Lambda \cdot t_R}}}$

$$\underline{\underline{e^{\Lambda \cdot t_R}}} = \begin{bmatrix} 0.78123 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.96464 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.46954 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.28221 \end{bmatrix}$$

- Die „Verharrmatrix“ $\underline{\underline{P}}_R$ gemäß Gleichung (71) (interessanter Weise ist die Matrix symmetrisch)

$$\underline{\underline{P}}_R = \begin{bmatrix} 0.71262 & 0.21199 & 0.03556 & 0.00447 \\ 0.21199 & 0.53619 & 0.18090 & 0.03556 \\ 0.03556 & 0.18090 & 0.53619 & 0.21199 \\ 0.00447 & 0.03556 & 0.21199 & 0.71262 \end{bmatrix}$$

- Für die Entladung des Speichers mit einem Gasstrom liegen identische Übertragungsmatrizen vor.

- Die veränderten Betriebscharakteristiken $\underline{\underline{\Phi}}_f$ und $\underline{\underline{\Phi}}_g$ mit der Strukturbeziehung (18)

$$\underline{\underline{\Phi}}_f = \begin{bmatrix} 0.10714 & 0 & 0 & 0 \\ 0.09566 & 0.10714 & 0 & 0 \\ 0.08541 & 0.09566 & 0.10714 & 0 \\ 0.07626 & 0.08541 & 0.09566 & 0.10714 \\ 0.07626 & 0.08541 & 0.09566 & 0.10714 \\ 0.06809 & 0.07626 & 0.08541 & 0.20281 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\Phi}}_g = \begin{bmatrix} 0.89286 \\ 0.79719 \\ 0.71178 \\ 0.63552 \\ 0.63552 \\ 0.56743 \end{bmatrix}$$

- Die Koeffizientenmatrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_E$ für den Entladeprozess

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}_E = \begin{bmatrix} -0.35126 & 0.14400 & 0 & 0 \\ 0.16466 & -0.49526 & 0.14400 & 0 \\ 0.01845 & 0.16466 & -0.49526 & 0.14400 \\ 0.03118 & 0.03492 & 0.18311 & -0.52345 \end{bmatrix} h^{-1}$$

- Der Eingangsvektor $\underline{\mathbf{X}}$ und der stationäre Zustand für $t \rightarrow \infty$

$$\underline{\mathbf{X}}_E = \begin{bmatrix} 0.0144 \\ 0.0144 \\ 0.0144 \\ 0.0144 \end{bmatrix} h^{-1} \quad \underline{\mathbf{T}}_f^s = \begin{bmatrix} 9.6420 \\ 9.6268 \\ 9.6257 \\ 9.6853 \end{bmatrix} ^\circ C$$

- Die Eigenwertmatrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ gemäß Gleichung (68)

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} -0.19880 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.36074 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.57079 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.73489 \end{bmatrix} h^{-1}$$

- Die Matrix der Eigenvektoren $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ nach Gleichung (68)

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}}_E = \begin{bmatrix} 0.51129 & 0.50997 & 0.38731 & 0.19820 \\ 0.54131 & -0.03357 & -0.59048 & -0.52802 \\ 0.52975 & -0.61449 & -0.13315 & 0.65205 \\ 0.40613 & -0.60100 & 0.69541 & -0.50670 \end{bmatrix}$$

- Die exponentierte Matrix der Eigenwerte $\underline{\underline{\mathbf{e}^{\mathbf{A} \cdot t_E}}}$

$$\underline{\underline{\mathbf{e}^{\mathbf{A} \cdot t_E}}} = \begin{bmatrix} 0.67193 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.48604 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.31931 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.22998 \end{bmatrix}$$

- Die „Entladematrix“ $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_E$ gemäß Gleichung (71)

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}}_E = \begin{bmatrix} 0.51730 & 0.12782 & 0.01741 & 0.00159 \\ 0.14874 & 0.40978 & 0.11244 & 0.01550 \\ 0.04354 & 0.13491 & 0.40958 & 0.10758 \\ 0.03722 & 0.05303 & 0.14090 & 0.37059 \end{bmatrix}$$

- Der quasistationäre Zustand nach Aufladung $\underline{\mathbf{T}}_f^A$, Verharren $\underline{\mathbf{T}}_f^R$ und Entladen $\underline{\mathbf{T}}_f^E$ gemäß Gleichung (93)

$$\underline{\mathbf{T}}_f^A = \begin{bmatrix} 84.1 \\ 85.5 \\ 85.0 \\ 78.4 \end{bmatrix} ^\circ C \quad \underline{\mathbf{T}}_f^R = \begin{bmatrix} 81.6 \\ 82.0 \\ 80.8 \\ 77.5 \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{T}}_f^E = \begin{bmatrix} 57.4 \\ 59.0 \\ 59.0 \\ 51.4 \end{bmatrix}$$

Ausgehend von den quasistationären „Referenzpunkten“, den Anfangsbedingungen der Auflade-, Verharrens-, und Entladephase, ist es möglich die Prozesse im Zustandsraum mit beliebiger zeitlicher Auflösung gemäß Gleichung (86) zu simulieren.

5 Zusammenfassung

Das vorgestellte allgemeine Modell ermöglicht die Simulation des dynamischen Verhaltens beliebiger Konstruktionen von Regeneratoren mit ortsfesten Speichermassen sowie thermischen Speichern nach einem einheitlichen Schema. Das Modell gründet auf der Vorstellung eines Netzwerkes von konduktiv und konvektiv verschalteten inkrementellen Gas- und Feststoffzellen. Dadurch ist das Modell sehr flexibel einsetzbar. Der Modellumfang spielt praktisch keine Rolle. Das Modell berücksichtigt neben dem Wärmeübergang zwischen Gas und Feststoff, die Wärmeleitung innerhalb der Speichermasse sowie Wärmeverluste an die Umgebung. Hierbei kommen die „klassischen“ Ansätze des Wärmetransportes zur Anwendung.

Die beschreibenden Differenzialgleichungssysteme sind automatisch generierbar. Das Lösungskonzept basiert auf der Methode des Zustandsraumes. Dadurch liegen stets analytische Lösungen der Modellgleichungen vor, mit denen die Auf- und Entladeprozesse mit beliebigen Zeitschritten mathematisch exakt simulierbar sind. Die üblichen Iterationen bei der Ermittlung quasistationärer Zustände entfallen gänzlich. Extreme Rechenzeiten treten somit Apriori nicht auf! Für die Simulation sind Rechner der Mittelklasse mit Standardsoftware wie z.B. VBA völlig ausreichend. Die Rechenzeit beträgt meist weniger als eine Minute. Viele verwendete Matrizen sind schwach besetzt. Mit geeigneten Listenmethoden zur Speicherung derartiger Matrizen ist es möglich die vorgestellten Algorithmen zu „straffen“. Des Weiteren ist die Parametrierung von strukturbeschreibenden Matrizen algorithmisierbar.

Dem vorstehend erläuterten Simulationsmodell liegt ein abstraktes Netzmodell zu Grunde. Daher existieren Analogien zu elektrischen Netzen (Gleich-, Wechsel- und Drehstrom), Gas- und Flüssigkeitsnetzen, Wärmeübertrager- und Kolonnenschaltungen, Wirtschaftssystemen sowie weiteren darüber hinaus gehenden Anwendungen. Sämtliche Modelle sind untereinander kompatibel, somit kombinierbar und weisen Erweiterungsmöglichkeiten auf.

Die Anwendung der vorgestellten Modelle erfordert Programmierkenntnisse auf einem ingenieurtechnischen Niveau, wie es derzeit an Technischen Hochschulen vermittelt wird. Damit ist das vorgestellte Modell praxistauglich.

6 Formelzeichen

6.1 Skalare

a	... Zählindex	... —
α	... Wärmeübergangskoeffizient	... $kW m^{-2}K^{-1}$
Δ	... Differenz	... —
Δt	... Zeitdifferenz	... s, h
e	... Zählindex	... —
Φ	... Betriebscharakteristik	... —
f	... Anzahl Festkörperzellen	... —
g	... Anzahl Gaszellen	... —
\dot{H}	... Enthalpiestrom	... kW
i	... Zählindex	... —
k	... Anzahl Zellen	... —
λ	... Wärmeleitkoeffizient	... $kW m^{-1}K^{-1}$
λ	... Eigenwert	... s^{-1}
l	... Anzahl Kopplungen	... —
L	... thermischer Leitwert	... $kW K^{-1}$
m	... Masse	... kg
\dot{m}	... Massestrom	... $kg s^{-1}$
n	... Zählindex	... —
p	... Konstante	... —
\dot{Q}	... Wärmestrom	... kW
r	... Zählindex Diagonale	... —
s	... Schichtdicke	... m
t	... Zeit	... s, h
Δt	... Zeitspanne	... s, h
T	... Temperatur	... $^{\circ}C, K$
z	... Anzahl Zeitschritte bzw. Zustandsgrößen	... —

6.2 Vektoren

\underline{c}	... Konstantenvektor	... —
$\underline{\Phi}$... Vektor der Betriebscharakteristiken	... —
\underline{T}	... Temperaturvektor	... $^{\circ}C, K$
$\underline{\dot{U}}$... Änderung der Inneren Energie	... kW
\underline{Z}	... Zustandsvektor	... $^{\circ}C, K$
$\underline{0}$... Nullvektor	... —

6.3 Matrizen

$\underline{\underline{\mathbf{A}}}$... Eingangsmatrix	... —
$\underline{\underline{\mathbf{B}}}$... Bypassmatrix	... —
$\underline{\underline{\mathbf{C}}}$... Matrix der Kapazität	... $kJ K^{-1}$
$\underline{\underline{\dot{\mathbf{C}}}}$... Matrix der Kapazitätsströme	... $kW K^{-1}$
$\underline{\underline{\mathbf{E}}}$... Einheitsmatrix	... —
$\underline{\underline{\mathbf{I}}}$... Inputmatrix	... —
$\underline{\underline{\mathbf{L}}}$... Matrix der thermischen Leitwerte	... $kW K^{-1}$
$\underline{\underline{\underline{\mathbf{L}}}}$... Matrix der Eigenwerte	... s^{-1}, h^{-1}
$\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{L}}}}}$... Matrix der Eigenwerte	... s^{-1}, h^{-1}
$\underline{\underline{\mathbf{M}}}$... Koeffizientenmatrix, Modellmatrix	... s^{-1}
$\underline{\underline{\mathbf{N}}}$... Übertragungsmatrix	... —, s^{-1}
$\underline{\underline{\mathbf{O}}}$... Ausgangsmatrix	... —
$\underline{\underline{\mathbf{P}}}$... Exponentialmatrix	... —
$\underline{\underline{\mathbf{S}}}$... Strukturmatrix	... —
$\underline{\underline{\underline{\mathbf{S}}}}$... Matrix der Eigenvektoren	... —
$\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{\Phi}}}}}$... Matrix der Betriebscharakteristiken	... —
$\underline{\underline{\mathbf{0}}}$... Nullmatrix	... —

6.4 Indizes

\square_A	... Aufladen
\square_E	... Entladen
\square^A	... Ausgang (Apparat)
\square^E	... Eingang (Apparat)
\square^e	... Eingang (Zelle)
\square^h	... heiss
\square^k	... kalt
\square_h	... heiss
\square_k	... kalt
\square_f	... Festkörper
\square_g	... Gasstrom
\square_t	... Zeit
$\square_{\Delta t}$... Zeitspanne
\square^s	... stationär
\square_u	... Umgebung

7 Literatur

- [1] Takahashi, Y.: Regelungstechnik, 14 (1966) 10, S. 449 - 455
- [2] Takahashi, Y.: Regelungstechnik, 14 (1966) 11, S. 513 - 518
- [3] Korn, U.: „Beitrag zur Anwendung der Zustandsraumbeschreibung und Einführung des Matrix-Signalflußbildes für den Entwurf von Prozessregelungen“; Dissertation Magdeburg 1968
- [4] Naslin, P.: "Dynamik linearer und nichtlinearer Systeme"
R. Oldenburg, München-Wien, 1968
- [5] Unbehauen, R.: „Systemtheorie - Eine Einführung für Ingenieure“
R. Oldenburg, München-Wien, 1969
- [6] Hausen, H.: „Berechnung der Wärmeübertragung in Regeneratoren bei zeitlich veränderlichen Mengenstrom“
Int. J. Heat Mass Transfer 13 (1970) S. 1753-1766
- [7] Sandner, H.: „Beitrag zur linearen Theorie des Regenerators“
Dissertation TU München 1971
- [8] VDI-Gesellschaft, VDI Wärmeatlas 11. Auflage
Springer Verlag Berlin Heidelberg; 2013
- [9] Kunz, G.: „Dynamische Simulation eingeschwungener thermischer Zustände von Druckgießformen“; Dissertation TU Dresden 2013
- [10] StreLOW, O.: „Optimierung von Erdgasversorgungsnetzen“
VDI-Tagung „Optimierung in der Energieversorgung“; Stuttgart 1994
- [11] StreLOW, O.: „Eine allgemeine Methode zur Berechnung von Wärmeübertragerschaltungen“; Forschung im Ingenieurwesen 63(1997)9; S.255-261
- [12] StreLOW, O.: „A general calculation method for plate heat exchangers“
International Journal of Thermal Sciences (2000)39; S.645-658
- [13] StreLOW, O.: „Allgemeines Berechnungsmodell für elektrische Netze“
THM-Hochschulzeitschriften Band 3; 2019
- [14] StreLOW, O.: „Die Allgemeine Theorie der technischen Netze“
Vorträge und Manuskripte