

Frank Müller

Konstruktion klassischer Lösungen für einen Gegenstrom-Wärmetauscher zum Benchmarking numerischer Verfahren

THM-Hochschulschriften Band 24



**Frank Müller**

Konstruktion klassischer Lösungen für einen  
Gegenstrom-Wärmetauscher zum Benchmarking  
numerischer Verfahren

THM-Hochschulschriften Band 24

THM-Hochschulschriften Band 24

© 2023 Frank Müller

Technische Hochschule Mittelhessen

Fachbereich Mathematik, Naturwissenschaften und  
Datenverarbeitung

Herausgeber der THM-Hochschulschriften:

Der Präsident der Technischen Hochschule Mittelhessen

Alle Rechte vorbehalten, Nachdruck, auch auszugsweise, nur mit  
schriftlicher Genehmigung und Quellenangabe.

Die Hochschulschriften sind online abrufbar:

[www.thm.de/bibliothek/thm-hochschulschriften](http://www.thm.de/bibliothek/thm-hochschulschriften)

ISSN (Print) 2568-0846

ISSN (Online) 2568-3020

# Konstruktion klassischer Lösungen für einen Gegenstrom-Wärmetauscher zum Benchmarking numerischer Verfahren

Frank Müller

Technische Hochschule Mittelhessen  
Fachbereich Mathematik, Naturwissenschaften  
und Datenverarbeitung  
Wilhelm-Leuschner-Straße 13  
D-61169 Friedberg, Germany

Email: Frank.Mueller@mnd.thm.de

20. März 2023

## Zusammenfassung

In diesem Artikel werden klassische Lösungen eines Anfangs- und Randwertproblems für ein hyperbolisches System partieller Differentialgleichungen konstruiert. Dieses hyperbolische System beschreibt den zeitlichen und örtlichen Verlauf der Temperaturen in einem Gegenstrom-Wärmetauscher. Da die charakteristischen Gleichungen nicht auf ein geschlossenes System gewöhnlicher Differentialgleichungen führen, liefert die Methode der Charakteristiken hier keine Lösung. Die Existenz klassischer Lösungen kann gezeigt werden, wenn gewisse Bedingungen erfüllt sind, und diese Lösungen lassen sich durch elementare Funktionen darstellen. Die so konstruierten klassischen Lösungen können verwendet werden als Benchmark-Lösungen zum Testen numerischer Verfahren.

## Abstract

In this article classical solutions to an initial and boundary value problem for a hyperbolic system are constructed. This hyperbolic system describes the dynamic behaviour of the temperatures in a counter current heat exchanger. Since the characteristic equations do not lead to a closed form ODE system, the method of characteristics does not lead to a solution. Existence of classical solutions can be proven under certain conditions and these solutions are constructed explicitly in terms of elementary functions. The constructed classical solutions can be used as benchmark solutions for testing numerical procedures.

## Keywords

Hyperbolic system, Partial differential equations, Initial and boundary value problem, Counter current heat exchanger, Classical solution, Benchmark solution

# 1 Einleitung

Wärmetauscher übertragen thermische Energie (Wärme) von einem fließenden Fluid mit höherer Temperatur auf ein anderes fließendes Fluid mit geringerer Temperatur. Die beiden Fluide sind getrennt durch eine Trennwand und somit findet der Wärmeaustausch durch diese Trennwand statt. Die Seite, auf der das wärmere Fluid fließt, heißt Primärseite, und die Seite, auf der das kältere Fluid fließt, heißt Sekundärseite. Bei einem Gegenstrom-Wärmetauscher fließen die beiden Fluide in entgegengesetzte Richtung. Neben dem Gegenstromprinzip gibt es auch das Parallelstromprinzip und das Kreuzstromprinzip.

Wir betrachten einen Gegenstrom-Wärmetauscher der Länge  $L$ . Die Temperaturen im Punkt  $x$  zur Zeit  $t$  auf der Primärseite und auf der Sekundärseite bezeichnen wir mit  $\vartheta_1(x, t)$  und  $\vartheta_2(x, t)$ . Beginnend zum Anfangszeitpunkt  $t = 0$  tritt auf der Primärseite im Punkt  $x = 0$  das wärmere Fluid mit der konstanten Eintrittstemperatur  $\vartheta_{1, \text{ein}}$  und der konstanten Geschwindigkeit  $v_1$  in den Wärmetauscher ein, gibt Wärme an das Fluid auf der Sekundärseite ab, und tritt an der Stelle  $x = L$  wieder aus dem Wärmetauscher aus. Auf der Sekundärseite tritt im Punkt  $x = L$  das kältere Fluid mit der konstanten Eintrittstemperatur  $\vartheta_{2, \text{ein}}$  und der konstanten Geschwindigkeit  $v_2$  in den Wärmetauscher ein, nimmt Wärme von der Primärseite auf und verlässt an der Stelle  $x = 0$  den Wärmetauscher wieder. In [1] Abbildung 1 ist eine Prinzipskizze eines Gegenstrom-Wärmetauschers zu sehen. Während in [1] dynamische Eintrittstemperaturen betrachtet werden, beschränken wir uns in diesem Artikel auf konstante Eintrittstemperaturen. Damit ist die hier betrachtete Situation ein Spezialfall der in [1] betrachteten Situation.

Vernachlässigt man Diffusionseffekte und thermische Verluste nach außen, so liefert eine Energiebilanz mit einem linearen Wärmeübertragungsmodell das folgende Anfangs- und Randwertproblem für die Temperaturen im Wärmetauscher:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vartheta_1(x, t) = -v_1 \frac{\partial}{\partial x} \vartheta_1(x, t) - \frac{\vartheta_1(x, t) - \vartheta_2(x, t)}{T_1}, \quad (x, t) \in U_T \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vartheta_2(x, t) = v_2 \frac{\partial}{\partial x} \vartheta_2(x, t) + \frac{\vartheta_1(x, t) - \vartheta_2(x, t)}{T_2}, \quad (x, t) \in U_T \quad (2)$$

$$\vartheta_1(x, 0) = \vartheta_{1,0}(x), \quad x \in [0, L] \quad (3)$$

$$\vartheta_2(x, 0) = \vartheta_{2,0}(x), \quad x \in [0, L] \quad (4)$$

$$\vartheta_1(0, t) = \vartheta_{1, \text{ein}}, \quad t \in (0, T] \quad (5)$$

$$\vartheta_2(L, t) = \vartheta_{2, \text{ein}}, \quad t \in (0, T] \quad (6)$$

Hierbei sind  $\vartheta_{1,0}, \vartheta_{2,0}$  gegebene stetige Anfangswerte auf der Primär- und Sekundärseite, die Werte  $T_1, T_2$  sind Zeitkonstanten,  $T$  ist die Beobachtungszeit des Prozesses und

$$U_T = (0, L) \times (0, T] \quad (7)$$

bezeichnet den parabolischen Zylinder.

Im besten Fall liegt für ein Problem in der Mathematischen Physik eine eindeutige Lösung vor, die stetig von den Daten abhängt, man nennt dies dann ein gut gestelltes Problem. In einem solchen Fall kann diese Lösung für Simulationen verwendet werden. Auch wenn eine eindeutige Lösung existiert und konkret angegeben werden kann, kann es vorkommen, dass diese Lösung für Simulationen ungeeignet ist. In [2] wird ein Schichtenladespeicher betrachtet. Es kann gezeigt werden, dass für den Entladeprozess eine eindeutige Lösung existiert, diese jedoch für Langzeitsimulationen ungeeignet ist, da ihre Berechnung sehr hohe numerische Kosten erzeugt. Dennoch kann diese Lösung verwendet werden als Benchmark-Lösung zum Testen numerischer Verfahren.

Das PDE System (1) + (2) ist ein hyperbolisches System [3, 4] und daher ist die Existenz klassischer Lösungen [3, 4, 5] des Anfangs- und Randwertproblems abhängig von den Anfangswerten und den Eintrittstemperaturen. Die Methode der Charakteristiken [3, 4] führt hier nicht auf ein geschlossenes System gewöhnlicher Differentialgleichungen und somit nicht zu einer Lösung.

Da das System (1) + (2) keine Diffusionsterme enthält, kann eine initiale Unstetigkeit nicht geglättet werden, wie es durch Diffusionsterme geschehen würde. Eine anfängliche Unstetigkeit würde sich somit entlang der Charakteristiken mit der Geschwindigkeit  $v_1$  auf der Primärseite und mit der Geschwindigkeit  $v_2$  auf der Sekundärseite fortpflanzen. Durch den Wärmetauschprozess würde sich die Sprunghöhe der Unstetigkeit mit wachsender Zeit verkleinern, sie kann jedoch, im Unterschied zu Diffusionseffekten, nicht geglättet werden. Entsprechendes gilt für die Ableitungen. Diese Überlegungen lassen sich durch Kompatibilitätsbedingungen in [1] Satz 2 formal beschreiben.

In [1] wird ein verallgemeinerter Lösungsbegriff entwickelt, wobei Lösungen als Lösung eines zu (1) - (6) äquivalenten Systems von Integralgleichungen nur stetig sein müssen. Die Berechnung dieser verallgemeinerten Lösungen kann dann durch Picard Iteration erfolgen. Damit liegt grundsätzlich eine Benchmark-Lösung vor, die zum Testen numerischer Verfahren verwendet werden kann. Hierbei kann mit Hilfe vorhandener Fehlerschätzer die Anzahl der Iterationen bestimmt werden, ab der die Iterationen nur noch einen kleineren Fehler zur exakten Lösung aufweisen als eine vorgegebene Fehlerschranke. Eine solche Iterierte kann dann als numerisch exakte Lösung angesehen und für das Benchmarking verwendet werden.

Bei der Berechnung der eben erwähnten Picard Iterierten müssen komplizierte Doppelintegrale numerisch ausgewertet werden. Somit entstehen auch hier hohe numerische Kosten, die bei weniger leistungsfähigen Computern zu hohen Rechenzeiten führen. Daher ist es das Ziel dieses Artikels, Benchmark-Lösungen zu konstruieren, die mit geringen numerischen Kosten berechnet werden können.

Da es im allgemeinen Fall keine klassischen Lösungen gibt, werden häufig numerische Methoden verwendet, um Approximationen zu erhalten. Anwendung finden hierbei modifizierte Bessel Funktionen [6, 7], Laplace Transformation [8, 9] in Verbindung mit Integralgleichungsmethoden [10, 11], Linienmethoden in Verbindung mit Finite Differenzen Verfahren [12, 13] sowie Finite Volumen Methoden [14] in Verbindung mit Energieerhaltungsmethoden [15, 16].

In diesem Artikel werden klassische Lösungen des Anfangs- und Randwertproblems (1) - (6) konstruiert, welche als Benchmark-Lösungen zum Testen numerischer Verfahren verwendet werden können. Durch die Beschränkung auf konstante Eintrittstemperaturen, können stationäre Lösungen von (1) + (2) angegeben werden, die die Randbedingungen (5) + (6) erfüllen. Mit Hilfe der stationären Lösungen wird das PDE System (1) + (2) auf ein vereinfachtes PDE System mit homogenen Randbedingungen transformiert. Ein Ansatz in Form von elementaren Funktionen, wie er bei der Fourierschen Methode verwendet wird, führt hier nicht auf ein Orthonormalsystem von Lösungen, sondern auf Bedingungen für die Existenz von Lösungen. Die Analysis wird ausführlich durchgeführt und die Bedingungen für die Existenz solcher klassischer Lösungen werden herausgearbeitet. Für den Fall, dass eine der Bedingungen erfüllt ist, können die klassischen Lösungen explizit durch elementare Funktionen dargestellt werden, deren Berechnung nur sehr geringe numerische Kosten erzeugt. Die noch zu wählenden freien Parameter können durch ein Minimierungsverfahren mit Hilfe von Referenz-Anfangsprofilen bestimmt werden. Zum Vergleich mit der exakten klassischen Lösung wird ein numerisches Verfahren auf Basis einer Linienmethode entwickelt, und dieses numerische Verfahren wird in einem Beispiel mit der klassischen Lösung verglichen.

## 2 Konstruktion klassischer Lösungen

**Definition 1.** Jede Funktion  $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2)^T \in C^1(U_T, \mathbb{R}^2) \cap C(\overline{U_T}, \mathbb{R}^2)$ , die das PDE System (1) + (2) im klassischen Sinne löst und außerdem (3) - (6) erfüllt, heißt klassische Lösung des Anfangs- und Randwertproblems.

Das PDE System (1) + (2) ist ein hyperbolisches System und die Eigenwerte sind gegeben durch:

$$\lambda_1 = v_1, \quad \lambda_2 = -v_2 \quad (8)$$

Ist  $\vartheta$  eine klassische Lösung von (1) - (6), so führt die Integration entlang der Charakteristiken [1] wegen  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  nicht auf ein geschlossenes System gewöhnlicher Differentialgleichungen und somit führt die Methode der Charakteristiken hier nicht zu einer Lösung. Sie führt jedoch auf ein äquivalentes System von Integralgleichungen. In [1] wird dieses System von Integralgleichungen für eine verallgemeinerte Formulierung des Lösungsbegriffs herangezogen. Existenz und Eindeutigkeit solcher verallgemeinerter Lösungen können mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes bewiesen werden. Hier möchten wir stattdessen klassische Lösungen konstruieren für Fälle, in denen klassische Lösungen existieren.

Betrachten wir das unbeschränkte Zeitintervall  $[0, \infty)$  anstelle des beschränkten Zeitintervalls  $[0, T]$ , so kann das Verhalten für  $t \rightarrow \infty$  untersucht werden. Sei  $\vartheta$  eine klassische Lösung von (1) - (6), die für alle  $t \in [0, \infty)$  existiert. Aufgrund der konstanten Eintrittstemperaturen dürfen wir annehmen, dass für  $t \rightarrow \infty$  die Zeitableitungen verschwinden und definieren:

$$u_1(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \vartheta_1(x, t), \quad u_2(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \vartheta_2(x, t) \quad (9)$$

Aus (1) - (6) erhalten wir dann, dass  $u = (u_1, u_2)^T$  das folgende Randwertproblem löst:

$$v_1 T_1 \frac{du_1(x)}{dx} = u_2(x) - u_1(x), \quad x \in (0, L) \quad (10)$$

$$v_2 T_2 \frac{du_2(x)}{dx} = u_2(x) - u_1(x), \quad x \in (0, L) \quad (11)$$

$$u_1(0) = \vartheta_{1, \text{ein}} \quad (12)$$

$$u_2(L) = \vartheta_{2, \text{ein}} \quad (13)$$

**Satz 1.** Das Randwertproblem (10) - (13) besitzt eine eindeutige klassische Lösung, und diese ist gegeben durch:

$$u_1(x) = \begin{cases} \vartheta_{1, \text{ein}} - \frac{\vartheta_{1, \text{ein}} - \vartheta_{2, \text{ein}}}{L + v_1 T_1} x & , \quad \eta = 0 \\ \vartheta_{1, \text{ein}} - \frac{\vartheta_{1, \text{ein}} - \vartheta_{2, \text{ein}}}{1 - \frac{v_1 T_1}{v_2 T_2} e^{-\eta L}} (1 - e^{-\eta x}) & , \quad \eta \neq 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$u_2(x) = \begin{cases} \vartheta_{1, \text{ein}} - \frac{\vartheta_{1, \text{ein}} - \vartheta_{2, \text{ein}}}{L + v_1 T_1} (v_1 T_1 + x) & , \quad \eta = 0 \\ \vartheta_{1, \text{ein}} - \frac{\vartheta_{1, \text{ein}} - \vartheta_{2, \text{ein}}}{1 - \frac{v_1 T_1}{v_2 T_2} e^{-\eta L}} \left(1 - \frac{v_1 T_1}{v_2 T_2} e^{-\eta x}\right) & , \quad \eta \neq 0 \end{cases} \quad (15)$$

$$\eta = \frac{1}{v_1 T_1} - \frac{1}{v_2 T_2} \quad (16)$$

*Beweis.* Durch Nachrechnen bestätigt man, dass (14) + (15) das RWP (10) - (13) löst. Da  $u$  nicht von  $t$  abhängt, ist  $u$  eine Lösung von (1) - (6) mit  $\vartheta_0 = u$ . Die Eindeutigkeit folgt nun mit [1] Satz 1.  $\square$

**Satz 2.** Sei  $u$  die stationäre Lösung. Weiterhin sei  $y$  eine klassische Lösung des folgenden Randwertproblems:

$$\frac{\partial}{\partial t} y_1(x, t) = -v_1 \frac{\partial}{\partial x} y_1(x, t) + \frac{1}{T_1} y_2(x, t) \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} y_2(x, t) = v_2 \frac{\partial}{\partial x} y_2(x, t) + \frac{1}{T_2} y_1(x, t) \quad (18)$$

$$y_1(0, t) = 0 \quad (19)$$

$$y_2(L, t) = 0 \quad (20)$$

Dann ist die durch

$$\vartheta_1(x, t) = u_1(x) + e^{\frac{(T_1 - T_2)x - (v_1 T_1 + v_2 T_2)t}{(v_1 + v_2) T_1 T_2}} y_1(x, t) \quad (21)$$

$$\vartheta_2(x, t) = u_2(x) + e^{\frac{(T_1 - T_2)x - (v_1 T_1 + v_2 T_2)t}{(v_1 + v_2) T_1 T_2}} y_2(x, t) \quad (22)$$

definierte Funktion  $\vartheta$  eine klassische Lösung des PDE Systems (1) + (2), die die Randbedingungen (5) + (6) erfüllt.

*Beweis.* Sei  $y$  eine klassische Lösung des Randwertproblems (17) - (20). Da  $u$  und auch die Exponentialfunktion glatt sind, hat  $\vartheta$  die gleiche Regularität wie  $y$ . Von (10) und (11) erhalten wir:

$$v_1 \frac{du_1(x)}{dx} = \frac{1}{T_1} (u_2(x) - u_1(x)) \quad (23)$$

$$v_2 \frac{du_2(x)}{dx} = \frac{1}{T_2} (u_2(x) - u_1(x)) \quad (24)$$

Differenzieren von (21) und (22) liefert:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \vartheta_1(x, t) + v_1 \frac{\partial}{\partial x} \vartheta_1(x, t) + \frac{1}{T_1} (\vartheta_1(x, t) - \vartheta_2(x, t)) \\ &= e^{\frac{(T_1 - T_2)x - (v_1 T_1 + v_2 T_2)t}{(v_1 + v_2) T_1 T_2}} \left( \frac{\partial}{\partial t} y_1(x, t) + v_1 \frac{\partial}{\partial x} y_1(x, t) - \frac{1}{T_1} y_2(x, t) \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

und:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \vartheta_2(x, t) - v_2 \frac{\partial}{\partial x} \vartheta_2(x, t) - \frac{1}{T_2} (\vartheta_1(x, t) - \vartheta_2(x, t)) \\ &= e^{\frac{(T_1 - T_2)x - (v_1 T_1 + v_2 T_2)t}{(v_1 + v_2) T_1 T_2}} \left( \frac{\partial}{\partial t} y_2(x, t) - v_2 \frac{\partial}{\partial x} y_2(x, t) - \frac{1}{T_2} y_1(x, t) \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Also lösen (21) und (22) das PDE System (1) + (2). Wegen

$$\vartheta_1(0, t) = u_1(0) = \vartheta_{1, \text{ein}} \quad (27)$$

$$\vartheta_2(L, t) = u_2(L) = \vartheta_{2, \text{ein}} \quad (28)$$

sind auch die Randbedingungen (5) und (6) erfüllt.  $\square$

Um eine nicht-triviale Lösung von (17) + (18) zu erhalten, machen wir einen Ansatz der Form:

$$y_1(x, t) = e^{\lambda t} (C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x)) \quad (29)$$

$$y_2(x, t) = e^{\lambda t} (C_3 \sin(\omega x) + C_4 \cos(\omega x)) \quad (30)$$

Einsetzen von (29) + (30) in das PDE System (17) + (18) liefert:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\lambda C_1}{v_1} - C_2 \omega - \frac{C_3}{v_1 T_1} \right) \sin(\omega x) + \left( C_1 \omega + \frac{\lambda C_2}{v_1} - \frac{C_4}{v_1 T_1} \right) \cos(\omega x) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{C_1}{v_2 T_2} - \frac{\lambda C_3}{v_2} - C_4 \omega \right) \sin(\omega x) + \left( \frac{C_2}{v_2 T_2} + C_3 \omega - \frac{\lambda C_4}{v_2} \right) \cos(\omega x) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Hier erhalten wir Gleichheit für alle  $x \in [0, L]$  genau dann, wenn die Koeffizienten von  $\sin(\omega x)$  und  $\cos(\omega x)$  alle verschwinden. Hieraus erhalten wir das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \frac{\lambda}{v_1} & -\omega & -\frac{1}{v_1 T_1} & 0 \\ \omega & \frac{\lambda}{v_1} & 0 & -\frac{1}{v_1 T_1} \\ \frac{1}{v_2 T_2} & 0 & -\frac{\lambda}{v_2} & -\omega \\ 0 & \frac{1}{v_2 T_2} & \omega & -\frac{\lambda}{v_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

Dieses homogene LGS besitzt nicht-triviale Lösungen nur, wenn  $\omega$  die folgende Gleichung löst:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{v_1} & -\omega & -\frac{1}{v_1 T_1} & 0 \\ \omega & \frac{\lambda}{v_1} & 0 & -\frac{1}{v_1 T_1} \\ \frac{1}{v_2 T_2} & 0 & -\frac{\lambda}{v_2} & -\omega \\ 0 & \frac{1}{v_2 T_2} & \omega & -\frac{\lambda}{v_2} \end{pmatrix} = 0 \quad (34)$$

Die Auswertung der Determinante liefert die Gleichung:

$$\omega^4 + \left( \frac{\lambda^2}{v_1^2} + \frac{\lambda^2}{v_2^2} - \frac{2}{v_1 T_1 v_2 T_2} \right) \omega^2 + \left( \frac{\lambda^2}{v_1 v_2} - \frac{1}{v_1 T_1 v_2 T_2} \right)^2 = 0 \quad (35)$$

**Satz 3.** Sei  $\omega > 0$  eine Lösung von (35). Für beliebige Konstanten  $C_1, C_2, C_3, C_4$  ist dann durch

$$\begin{aligned} y_1(x, t) &= e^{\lambda t} (C_1 + \lambda T_2 C_3 + \omega v_2 T_2 C_4) \sin(\omega x) \\ &\quad + e^{\lambda t} (C_2 - \omega v_2 T_2 C_3 + \lambda T_2 C_4) \cos(\omega x) \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} y_2(x, t) &= e^{\lambda t} (\lambda T_1 C_1 - \omega v_1 T_1 C_2 + C_3) \sin(\omega x) \\ &\quad + e^{\lambda t} (\omega v_1 T_1 C_1 + \lambda T_1 C_2 + C_4) \cos(\omega x) \end{aligned} \quad (37)$$

eine Lösung des PDE Systems (17) + (18) gegeben.

*Beweis.* Ist  $\omega > 0$  eine Lösung von (35), so hat das LGS (33) nicht-triviale Lösungen. Wählen wir  $C_1, C_2$  als Parameter, so liefert (33) Werte für  $C_3, C_4$  und diese in (29) + (30) eingesetzt, liefert eine Lösung von (17) + (18). Wählen wir analog  $C_3, C_4$  als Parameter, erhalten wir ebenso eine Lösung von (17) + (18). Aufgrund der Linearität des Systems (17) + (18) liefert Addition der Lösungen den Beweis.  $\square$

**Satz 4.** Für  $v_1 \neq v_2$  besitzt die Gleichung (35) eine positive Lösung nur, wenn  $\lambda = 0$  ist. In diesem Fall ist die eindeutige positive Lösung gegeben durch:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{v_1 T_1 v_2 T_2}} \quad (38)$$

Für beliebige Konstanten  $C_1, C_4$  ist dann durch

$$y_1(x, t) = (C_1 + \omega_0 v_2 T_2 C_4) \sin(\omega_0 x) \quad (39)$$

$$y_2(x, t) = (\omega_0 v_1 T_1 C_1 + C_4) \cos(\omega_0 x) \quad (40)$$

eine Lösung des PDE Systems (17) + (18) gegeben und die Randbedingung (19) ist erfüllt. Die Randbedingung (20) ist erfüllt, wenn eine Zahl  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  existiert mit:

$$\omega_0 L = \frac{\pi}{2} + k \pi \quad (41)$$

*Beweis.* Sei  $v_1 \neq v_2$ . Für  $\lambda = 0$  hat Gleichung (35) die Darstellung

$$\omega^4 - \frac{2}{v_1 T_1 v_2 T_2} \omega^2 + \left( \frac{1}{v_1 T_1 v_2 T_2} \right)^2 = 0 \quad (42)$$

mit der eindeutigen positiven Lösung (38). Für  $\lambda \neq 0$  haben Lösungen der Gleichung (35) die Form:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{1}{v_1 T_1 v_2 T_2} - \frac{\lambda^2 (v_1^2 + v_2^2)}{2v_1^2 v_2^2} \\ &\pm \sqrt{\left( \frac{\lambda^2 (v_1^2 + v_2^2)}{2v_1^2 v_2^2} - \frac{1}{v_1 T_1 v_2 T_2} \right)^2 - \left( \frac{\lambda^2}{v_1 v_2} - \frac{1}{v_1 T_1 v_2 T_2} \right)^2} \end{aligned} \quad (43)$$

Hier erhalten wir reellwertige Lösungen für  $\omega^2$  nur, wenn der Ausdruck unter der Wurzel in (43) nicht negativ ist. Dies führt auf die Bedingung:

$$\begin{aligned} &\left( \frac{\lambda^2 (v_1^2 + v_2^2)}{2v_1^2 v_2^2} - \frac{1}{v_1 T_1 v_2 T_2} \right)^2 \geq \left( \frac{\lambda^2}{v_1 v_2} - \frac{1}{v_1 T_1 v_2 T_2} \right)^2 \\ \Leftrightarrow &\frac{\lambda^4 (v_1 - v_2)^2 (v_1 + v_2)^2}{4v_1 v_2} \geq \frac{\lambda^2 (v_1 - v_2)^2}{T_1 T_2} \\ \Leftrightarrow &\lambda^2 \geq \frac{4 v_1 v_2}{(v_1^2 + v_2^2) T_1 T_2} \end{aligned} \quad (44)$$

Ist Bedingung (44) erfüllt, so liefert (43) reellwertige Lösungen für  $\omega^2$ . Um eine reellwertige und positive Lösung für  $\omega$  zu erhalten, muss wenigstens eine Lösung für  $\omega^2$  positiv sein. Die größte dieser Lösungen ist die mit dem positiven Vorzeichen vor der Wurzel.

Eine hinreichende Bedingung, um eine positive Lösung für  $\omega^2$  zu erhalten, wäre die Forderung, dass der erste Term in (43) positiv ist, doch wegen

$$\frac{1}{v_1 T_1 v_2 T_2} > \frac{\lambda^2 (v_1^2 + v_2^2)}{2v_1^2 v_2^2} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 < \frac{2 v_1 v_2}{(v_1^2 + v_2^2) T_1 T_2} \quad (45)$$

führt dies zu einem Widerspruch zu (44). Also müssen wir nach positiven Lösungen suchen, wenn der erste Term nicht positiv ist. In diesem Fall erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{v_1 T_1 v_2 T_2} - \lambda^2 \frac{(v_1^2 + v_2^2)}{2v_1^2 v_2^2} \\ &+ \sqrt{\left( \frac{\lambda^2 (v_1^2 + v_2^2)}{2v_1^2 v_2^2} - \frac{1}{v_1 T_1 v_2 T_2} \right)^2 - \left( \frac{\lambda^2}{v_1 v_2} - \frac{1}{v_1 T_1 v_2 T_2} \right)^2} \\ \Leftrightarrow 0 &< - \left( \frac{\lambda^2}{v_1 v_2} - \frac{1}{v_1 T_1 v_2 T_2} \right)^2 \end{aligned} \quad (46)$$

Dies ist aber ebenfalls ein Widerspruch und somit hat (35) keine positive Lösung für  $v_1 \neq v_2$  und  $\lambda \neq 0$ . Da (38) eine Lösung von (35) ist, liefert Satz 3, dass (39) + (40) das PDE System (17) + (18) für beliebige Konstanten  $C_1, C_4$  löst. Wegen  $\sin(0) = 0$  ist die Randbedingung (19) erfüllt und wegen  $\cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0$  ist die Randbedingung (20) erfüllt, wenn (41) gilt. Damit ist der Beweis abgeschlossen.  $\square$

**Satz 5.** Für  $v_1 = v_2$  besitzt die Gleichung (35) die eindeutige positive Lösung

$$\omega_\lambda = \frac{1}{v_1} \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2} - \lambda^2}, \quad (47)$$

wenn die Bedingung

$$\lambda^2 < \frac{1}{T_1 T_2} \quad (48)$$

erfüllt ist. Dann ist für jede Konstante  $C_1$  durch

$$y_1(x, t) = e^{\lambda t} C_1 \sin(\omega_\lambda x) \quad (49)$$

$$y_2(x, t) = e^{\lambda t} T_1 C_1 (\lambda \sin(\omega_\lambda x) + \omega_\lambda v_1 \cos(\omega_\lambda x)) \quad (50)$$

eine Lösung des PDE Systems (17) + (18) gegeben und die Randbedingung (19) ist erfüllt. Wenn weiterhin eine Zahl  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  existiert mit

$$\frac{L}{v_1 \sqrt{T_1 T_2}} > \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad (51)$$

dann gibt es  $2k + 1$  Lösungen  $\lambda_1, \dots, \lambda_{2k+1}$  der Gleichung

$$\tan\left(\frac{L}{v_1} \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2} - \lambda^2}\right) = -\frac{\sqrt{\frac{1}{T_1 T_2} - \lambda^2}}{\lambda}, \quad \lambda^2 < \frac{1}{T_1 T_2} \wedge \lambda \neq 0 \quad (52)$$

und für jedes dieser  $\lambda_j$  erfüllt (50) die Randbedingung (20).

*Beweis.* Für  $v_1 = v_2$  hat Gleichung (35) die Darstellung

$$\omega^4 + 2\left(\frac{\lambda^2}{v_1^2} - \frac{1}{v_1^2 T_1 T_2}\right)\omega^2 + \left(\frac{\lambda^2}{v_1^2} - \frac{1}{v_1^2 T_1 T_2}\right)^2 = 0 \quad (53)$$

mit der eindeutigen positiven Lösung (47), wenn (48) erfüllt ist. Satz 3 liefert nun, dass (49) + (50) das PDE System (17) + (18) löst und wegen  $\sin(0) = 0$  ist die Randbedingung (19) erfüllt. Für  $\lambda \neq 0$  führt die Anwendung der Randbedingung (20) auf (50) zu der Gleichung:

$$\tan(\omega_\lambda L) = -\frac{\omega_\lambda v_1}{\lambda} \quad (54)$$

und mit (47) und (48) erhalten wir (52). Setzen wir

$$\xi(\lambda) = \omega_\lambda L = \frac{L}{v_1} \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2} - \lambda^2}, \quad (55)$$

so erhalten wir:

$$\tan(\xi(\lambda)) = -\frac{\xi(\lambda)}{\frac{L}{v_1} \lambda}, \quad 0 < \xi(\lambda) < \frac{L}{v_1 \sqrt{T_1 T_2}} \quad (56)$$

mit:

$$\lambda^2 = \frac{v_1^2}{L^2} \left( \frac{L^2}{v_1^2 T_1 T_2} - \xi^2(\lambda) \right) \quad (57)$$

Hieraus folgt für  $\lambda < 0$ :

$$\tan(\xi(\lambda)) = \frac{\xi(\lambda)}{\sqrt{\frac{L^2}{v_1^2 T_1 T_2} - \xi^2(\lambda)}}, \quad 0 < \xi(\lambda) < \frac{L}{v_1 \sqrt{T_1 T_2}} \quad (58)$$

und für  $\lambda > 0$ :

$$\tan(\xi(\lambda)) = -\frac{\xi(\lambda)}{\sqrt{\frac{L^2}{v_1^2 T_1 T_2} - \xi^2(\lambda)}}, \quad 0 < \xi(\lambda) < \frac{L}{v_1 \sqrt{T_1 T_2}} \quad (59)$$

Wegen

$$\xi'(\lambda) = -\frac{L}{v_1} \frac{\lambda}{\sqrt{\frac{1}{T_1 T_2} - \lambda^2}} \neq 0 \quad (60)$$

und

$$\left( \frac{\xi(\lambda)}{\sqrt{\frac{L^2}{v_1^2 T_1 T_2} - \xi^2(\lambda)}} \right)' = \frac{\xi'(\lambda) \left( \sqrt{\frac{L^2}{v_1^2 T_1 T_2} - \xi^2(\lambda)} + \frac{\xi^2(\lambda)}{\sqrt{\frac{L^2}{v_1^2 T_1 T_2} - \xi^2(\lambda)}} \right)}{\frac{L^2}{v_1^2 T_1 T_2} - \xi^2(\lambda)} \neq 0 \quad (61)$$

existiert für  $\lambda \neq 0$  genau ein Schnittpunkt in jedem Zweig der  $\tan$  Funktion, wenn  $\xi(\lambda)$  das gesamte Zweigintervall erreicht. Dies bedeutet, wenn die Bedingung (51) erfüllt ist, existieren  $2k + 1$  Lösungen  $\lambda_1, \dots, \lambda_{2k+1}$  der Gleichung (52) und für jedes dieser  $\lambda_j$  wird von (50) die Randbedingung (20) erfüllt.  $\square$

**Bemerkung 1.** Die Bedingung (48) bedeutet:

$$-\frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} < \lambda < \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} \quad (62)$$

Wegen

$$-\frac{T_1 + T_2}{2 T_1 T_2} + \lambda < -\frac{T_1 + T_2}{2 T_1 T_2} + \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} = -\frac{(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2}{2 T_1 T_2} \leq 0 \quad (63)$$

führen auch die positiven Werte von  $\lambda$  zu einem Abklingverhalten der Exponentialfunktion in (21) und (22).

Satz 4 zeigt, dass durch (39) + (40) für beliebige Konstanten  $C_1, C_4$  eine klassische Lösung des Randwertproblems (17) - (20) gegeben ist, wenn die Bedingung (41) erfüllt ist. Satz 5 zeigt, dass für jede Lösung  $\lambda_j$  der Gleichung (52) und beliebige Konstanten  $C_j$  durch (49) + (50) eine klassische Lösung des Randwertproblems (17) - (20) gegeben ist. Aufgrund der Linearität des PDE Systems (17) + (18) und der Homogenität der Randbedingungen (19) + (20) können diese Lösungen addiert werden und liefern wieder eine klassische Lösung des Randwertproblems (17) - (20). In diesen Fällen liefert dann (21) + (22) die eindeutige klassische Lösung von (1) - (6) mit den speziellen Anfangsbedingungen:

$$\vartheta_{1,0}(x) = \vartheta_1(x, 0) \quad (64)$$

$$\vartheta_{2,0}(x) = \vartheta_2(x, 0) \quad (65)$$

Wir fassen diese Ergebnisse im folgenden Satz zusammen.

**Satz 6.** (a) Für  $v_1 \neq v_2$  sei:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{v_1 T_1 v_2 T_2}} \quad (66)$$

Gibt es eine Zahl  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  mit:

$$\omega_0 L = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad (67)$$

so ist für beliebige Konstanten  $C$  durch

$$\vartheta_1(x, t) = u_1(x) + e^{\frac{(T_1 - T_2)x - (v_1 T_1 + v_2 T_2)t}{(v_1 + v_2) T_1 T_2}} C \sin(\omega_0 x) \quad (68)$$

$$\vartheta_2(x, t) = u_2(x) + e^{\frac{(T_1 - T_2)x - (v_1 T_1 + v_2 T_2)t}{(v_1 + v_2) T_1 T_2}} \omega_0 v_1 T_1 C \cos(\omega_0 x) \quad (69)$$

eine klassische Lösung des Anfangs- und Randwertproblems (1) - (6) mit den speziellen Anfangsbedingungen  $\vartheta_{1,0}(x) = \vartheta_1(x, 0)$  und  $\vartheta_{2,0}(x) = \vartheta_2(x, 0)$  gegeben.

(b) Sei  $v_1 = v_2$  und es existiere eine Zahl  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  mit:

$$\frac{L}{v_1 \sqrt{T_1 T_2}} > \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (70)$$

Dann gibt es  $2k + 1$  Lösungen  $\lambda_1, \dots, \lambda_{2k+1}$  der Gleichung:

$$\tan\left(\frac{L}{v_1} \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2} - \lambda^2}\right) = -\frac{\sqrt{\frac{1}{T_1 T_2} - \lambda^2}}{\lambda}, \quad \lambda^2 < \frac{1}{T_1 T_2} \wedge \lambda \neq 0 \quad (71)$$

Setzen wir

$$\omega_{\lambda_j} = \frac{1}{v_1} \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2} - \lambda_j^2}, \quad j = 1, \dots, 2k + 1, \quad (72)$$

so ist für beliebige Konstanten  $C_1, \dots, C_{2k+1}$  durch

$$\vartheta_1(x, t) = u_1(x) + e^{\frac{(T_1 - T_2)x - v_1(T_1 + T_2)t}{2 v_1 T_1 T_2}} \sum_{j=1}^{2k+1} e^{\lambda_j t} C_j \sin(\omega_{\lambda_j} x) \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_2(x, t) = & u_2(x) + T_1 e^{\frac{(T_1 - T_2)x - v_1(T_1 + T_2)t}{2 v_1 T_1 T_2}} \sum_{j=1}^{2k+1} e^{\lambda_j t} C_j \lambda_j \sin(\omega_{\lambda_j} x) \\ & + v_1 T_1 e^{\frac{(T_1 - T_2)x - v_1(T_1 + T_2)t}{2 v_1 T_1 T_2}} \sum_{j=1}^{2k+1} e^{\lambda_j t} C_j \omega_{\lambda_j} \cos(\omega_{\lambda_j} x) \end{aligned} \quad (74)$$

eine klassische Lösung des Anfangs- und Randwertproblems (1) - (6) mit den speziellen Anfangsbedingungen  $\vartheta_{1,0}(x) = \vartheta_1(x, 0)$  und  $\vartheta_{2,0}(x) = \vartheta_2(x, 0)$  gegeben.

*Beweis.* (a) Folgt aus den Sätzen 4 und 2 mit  $C = C_1$  und  $C_4 = 0$ . (b) Folgt aus den Sätzen 5 und 2.  $\square$

**Bemerkung 2.** Wegen

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \omega_0 v_2 T_2 \\ \omega_0 v_1 T_1 & 1 \end{pmatrix} = 1 - \omega_0^2 v_1 T_1 v_2 T_2 = 1 - \frac{v_1 T_1 v_2 T_2}{v_1 T_1 v_2 T_2} = 0 \quad (75)$$

lassen sich die Koeffizienten der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion in Satz 6.(a) nicht unabhängig wählen, und somit wurde o.B.d.A.  $C_4 = 0$  gesetzt.

### 3 Bestimmung der Konstanten

Satz 6 zeigt, dass es unendlich viele Anfangsprofile gibt, für die es eine eindeutige klassische Lösung des Anfangs- und Randwertproblems (1) - (6) gibt, wenn man die Geschwindigkeiten entsprechend wählt, dass Bedingung (41) oder Bedingung (51) erfüllt ist. Diese Lösungen sind dann natürlich keine Lösungen für den allgemeinen Fall, aber sie können verwendet werden als Benchmark-Lösungen, um numerische Verfahren zu testen. Die in den Lösungen auftretenden Konstanten können dann z.B. durch Anpassung an gewünschte Referenz-Anfangsprofile bestimmt werden.

Sind also  $\vartheta_{1,0}^{ref}$  und  $\vartheta_{2,0}^{ref}$  gegebene Referenz-Anfangsprofile, so können die Konstanten bestimmt werden durch Minimierung des Funktional:

$$F(C) = \int_0^L \left( \left( \vartheta_{1,0}(x) - \vartheta_{1,0}^{ref}(x) \right)^2 + \left( \vartheta_{2,0}(x) - \vartheta_{2,0}^{ref}(x) \right)^2 \right) dx \quad (76)$$

Dabei sind die Konstanten im Fall von Satz 6. (b) zum Vektor  $C$  zusammengefasst. Im Fall  $v_1 \neq v_2$  erhalten wir:

$$\vartheta_{1,0}(x) = u_1(x) + e^{\frac{(T_1-T_2)x}{(v_1+v_2)T_1T_2}} C \sin(\omega_0 x) \quad (77)$$

$$\vartheta_{2,0}(x) = u_2(x) + e^{\frac{(T_1-T_2)x}{(v_1+v_2)T_1T_2}} \omega_0 v_1 T_1 C \cos(\omega_0 x) \quad (78)$$

und somit:

$$\begin{aligned} F(C) &= \int_0^L \left( u_1(x) + e^{\frac{(T_1-T_2)x}{(v_1+v_2)T_1T_2}} C \sin(\omega_0 x) - \vartheta_{1,0}^{ref}(x) \right)^2 dx \\ &+ \int_0^L \left( u_2(x) + e^{\frac{(T_1-T_2)x}{(v_1+v_2)T_1T_2}} \omega_0 v_1 T_1 C \cos(\omega_0 x) - \vartheta_{2,0}^{ref}(x) \right)^2 dx \end{aligned} \quad (79)$$

Mit

$$\begin{aligned} \frac{dF(C)}{dC} &= 2 \int_0^L e^{\frac{(T_1-T_2)x}{(v_1+v_2)T_1T_2}} \sin(\omega_0 x) \left( e^{\frac{(T_1-T_2)x}{(v_1+v_2)T_1T_2}} C \sin(\omega_0 x) + u_1(x) - \vartheta_{1,0}^{ref}(x) \right) dx \\ &+ 2 \int_0^L e^{\frac{(T_1-T_2)x}{(v_1+v_2)T_1T_2}} \omega_0 v_1 T_1 \cos(\omega_0 x) \left( e^{\frac{(T_1-T_2)x}{(v_1+v_2)T_1T_2}} \omega_0 v_1 T_1 C \cos(\omega_0 x) \right. \\ &\left. + u_2(x) - \vartheta_{2,0}^{ref}(x) \right) dx \end{aligned} \quad (80)$$

führt die notwendige Bedingung

$$\frac{dF(C)}{dC} = 0 \quad (81)$$

auf die Lösung:

$$C = - \frac{\int_0^L e^{\frac{(T_1-T_2)x}{(v_1+v_2)T_1T_2}} f(x) dx}{\int_0^L e^{\frac{2(T_1-T_2)x}{(v_1+v_2)T_1T_2}} (\sin^2(\omega_0 x) + (\omega_0 v_1 T_1)^2 \cos^2(\omega_0 x)) dx} \quad (82)$$

mit:

$$f(x) = \sin(\omega_0 x) \left( u_1(x) - \vartheta_{1,0}^{ref}(x) \right) + \omega_0 v_1 T_1 \cos(\omega_0 x) \left( u_2(x) - \vartheta_{2,0}^{ref}(x) \right) \quad (83)$$

Im Fall  $v_1 = v_2$  erhalten wir:

$$\vartheta_{1,0}(x) = u_1(x) + e^{\frac{(T_1-T_2)x}{2v_1 T_1 T_2}} \sum_{j=1}^{2k+1} C_j \sin(\omega_{\lambda_j} x) \quad (84)$$

$$\vartheta_{2,0}(x) = u_2(x) + e^{\frac{(T_1-T_2)x}{2v_1 T_1 T_2}} \sum_{j=1}^{2k+1} C_j T_1 (\lambda_j \sin(\omega_{\lambda_j} x) + v_1 \omega_{\lambda_j} \cos(\omega_{\lambda_j} x)) \quad (85)$$

und somit:

$$\begin{aligned} F(C) &= \int_0^L \left( u_1(x) + e^{\frac{(T_1-T_2)x}{2v_1 T_1 T_2}} \sum_{j=1}^{2k+1} C_j \sin(\omega_{\lambda_j} x) - \vartheta_{1,0}^{ref}(x) \right)^2 dx \\ &\quad + \int_0^L \left( u_2(x) + e^{\frac{(T_1-T_2)x}{2v_1 T_1 T_2}} \sum_{j=1}^{2k+1} C_j g_j(x) - \vartheta_{2,0}^{ref}(x) \right)^2 dx \end{aligned} \quad (86)$$

mit:

$$g_j(x) = T_1 (\lambda_j \sin(\omega_{\lambda_j} x) + v_1 \omega_{\lambda_j} \cos(\omega_{\lambda_j} x)) \quad (87)$$

Wegen

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(C)}{\partial C_m} &= \int_0^L 2 e^{\frac{(T_1-T_2)x}{2v_1 T_1 T_2}} \left( \sin(\omega_{\lambda_m} x) e^{\frac{(T_1-T_2)x}{2v_1 T_1 T_2}} \sum_{j=1}^{2k+1} C_j \sin(\omega_{\lambda_j} x) \right. \\ &\quad + \sin(\omega_{\lambda_m} x) (u_1(x) - \vartheta_{1,0}^{ref}(x)) + g_m(x) (u_2(x) - \vartheta_{2,0}^{ref}(x)) \\ &\quad \left. + g_m(x) e^{\frac{(T_1-T_2)x}{2v_1 T_1 T_2}} \sum_{j=1}^{2k+1} C_j g_j(x) \right) dx \end{aligned} \quad (88)$$

führt die notwendige Bedingung

$$\frac{\partial F(C)}{\partial C_m} = 0, \quad m = 1, \dots, 2k+1 \quad (89)$$

auf das LGS:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{2k+1} C_j \int_0^L e^{\frac{2(T_1-T_2)x}{2v_1 T_1 T_2}} (\sin(\omega_{\lambda_m} x) \sin(\omega_{\lambda_j} x) + g_m(x) g_j(x)) dx \\ &= - \int_0^L e^{\frac{(T_1-T_2)x}{2v_1 T_1 T_2}} \sin(\omega_{\lambda_m} x) (u_1(x) - \vartheta_{1,0}^{ref}(x)) dx \\ &\quad - \int_0^L e^{\frac{(T_1-T_2)x}{2v_1 T_1 T_2}} g_m(x) (u_2(x) - \vartheta_{2,0}^{ref}(x)) dx, \quad m = 1, \dots, 2k+1 \end{aligned} \quad (90)$$

zur Bestimmung der  $C_j$ .

## 4 Numerische Lösung

Wie bereits erwähnt, können die konstruierten klassischen Lösungen verwendet werden als Benchmark-Lösungen zum Testen numerischer Verfahren. Hier verwenden wir als zu untersuchende numerische Methode eine Linienmethode [13] (Method of Lines - MOL). Wir konstruieren eine numerische Lösung mit einer Semi-Diskretisierung, hierbei wird nur die Ortsvariable  $x$  diskretisiert. Da wir eine  $C^1$ -Funktion als Benchmark-Lösung verwenden, existieren die klassischen Ableitungen und können daher approximiert werden.

Wir betrachten eine äquidistante Zerlegung des Ortsintervalls  $[0, L]$  mit der Schrittweite  $\Delta x$  und erhalten:

$$x_i = i \Delta x, \quad i = 0, \dots, N, \quad \Delta x = \frac{L}{N}, \quad N \in \mathbb{N} \quad (91)$$

Da auf der Primärseite der Randwert im Punkt  $x = 0$  und auf der Sekundärseite der Randwert im Punkt  $x = L$  gegeben sind, approximieren wir die Ortsableitung von  $\vartheta_1$  durch eine Rückwärtsdifferenz und die Ortsableitung von  $\vartheta_2$  durch eine Vorwärtsdifferenz. Wir erhalten:

$$\frac{\partial \vartheta_1(x_i, t)}{\partial x} \approx \frac{\vartheta_1(x_i, t) - \vartheta_1(x_{i-1}, t)}{\Delta x}, \quad i = 1, \dots, N \quad (92)$$

$$\frac{\partial \vartheta_2(x_i, t)}{\partial x} \approx \frac{\vartheta_2(x_{i+1}, t) - \vartheta_2(x_i, t)}{\Delta x}, \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (93)$$

Das PDE System (1) + (2) liefert nun:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \vartheta_{1,MOL}^{[N]}(x_i, t) + v_1 \left( \frac{\vartheta_{1,MOL}^{[N]}(x_i, t) - \vartheta_{1,MOL}^{[N]}(x_{i-1}, t)}{\Delta x} \right) \\ &= \frac{\vartheta_{2,MOL}^{[N]}(x_i, t) - \vartheta_{1,MOL}^{[N]}(x_i, t)}{T_1}, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (94)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \vartheta_{2,MOL}^{[N]}(x_i, t) - v_2 \left( \frac{\vartheta_{2,MOL}^{[N]}(x_{i+1}, t) - \vartheta_{2,MOL}^{[N]}(x_i, t)}{\Delta x} \right) \\ &= \frac{\vartheta_{1,MOL}^{[N]}(x_i, t) - \vartheta_{2,MOL}^{[N]}(x_i, t)}{T_2}, \quad i = 0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (95)$$

Hierbei bezeichnen  $\vartheta_{1,MOL}^{[N]}(x_i, t)$  und  $\vartheta_{2,MOL}^{[N]}(x_i, t)$  die Approximationen der Werte  $\vartheta_1(x_i, t)$  und  $\vartheta_2(x_i, t)$  durch die MOL Methode. Die Anfangsbedingungen (3) + (4) führen zu:

$$\vartheta_{1,MOL}^{[N]}(x_i, 0) = \vartheta_{1,0}(x_i), \quad i = 0, \dots, N \quad (96)$$

$$\vartheta_{2,MOL}^{[N]}(x_i, 0) = \vartheta_{2,0}(x_i), \quad i = 0, \dots, N \quad (97)$$

und aus den Randbedingungen (5) + (6) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vartheta_{1,MOL}^{[N]}(x_1, t) &= - \left( \frac{1}{T_1} + \frac{v_1}{\Delta x} \right) \vartheta_{1,MOL}^{[N]}(x_1, t) + \frac{v_1}{\Delta x} \vartheta_{1,ein} \\ &\quad + \frac{1}{T_1} \vartheta_{2,MOL}^{[N]}(x_1, t) \end{aligned} \quad (98)$$

sowie:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vartheta_{2,MOL}^{[N]}(x_{N-1}, t) &= - \left( \frac{1}{T_2} + \frac{v_2}{\Delta x} \right) \vartheta_{2,MOL}^{[N]}(x_{N-1}, t) + \frac{v_2}{\Delta x} \vartheta_{2,ein} \\ &\quad + \frac{1}{T_2} \vartheta_{1,MOL}^{[N]}(x_{N-1}, t) \end{aligned} \quad (99)$$

Schließlich erhalten wir für die inneren Punkte:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vartheta_{1,MOL}^{[N]}(x_i, t) &= - \left( \frac{1}{T_1} + \frac{v_1}{\Delta x} \right) \vartheta_{1,MOL}^{[N]}(x_i, t) + \frac{v_1}{\Delta x} \vartheta_{1,MOL}^{[N]}(x_{i-1}, t) \\ &\quad + \frac{1}{T_1} \vartheta_{2,MOL}^{[N]}(x_i, t), \quad i = 2, \dots, N \end{aligned} \quad (100)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vartheta_{2,MOL}^{[N]}(x_i, t) &= - \left( \frac{1}{T_2} + \frac{v_2}{\Delta x} \right) \vartheta_{2,MOL}^{[N]}(x_i, t) + \frac{v_2}{\Delta x} \vartheta_{2,MOL}^{[N]}(x_{i+1}, t) \\ &\quad + \frac{1}{T_2} \vartheta_{1,MOL}^{[N]}(x_i, t), \quad i = 0, \dots, N-2 \end{aligned} \quad (101)$$

Die Gleichungen (96) - (101) liefern ein Anfangswertproblem für die MOL Lösung. Setzen wir:

$$a_{jk}^{[N]} = \begin{cases} - \left( \frac{1}{T_1} + \frac{v_1}{\Delta x} \right) & , \quad k = j \wedge j \in \{1, \dots, N\} \\ - \left( \frac{1}{T_2} + \frac{v_2}{\Delta x} \right) & , \quad k = j \wedge j \in \{N+1, \dots, 2N\} \\ \frac{v_1}{\Delta x} & , \quad k = j-1 \wedge j \in \{2, \dots, N\} \\ \frac{v_2}{\Delta x} & , \quad k = j+1 \wedge j \in \{N+1, \dots, 2N-1\} \\ \frac{1}{T_1} & , \quad k = j+N \wedge j \in \{1, \dots, N\} \\ \frac{1}{T_2} & , \quad k = j-N \wedge j \in \{N+1, \dots, 2N\} \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} \quad (102)$$

und:

$$z_i^{[N]}(t) = \begin{cases} \vartheta_{1,MOL}^{[N]}(x_i, t) & , \quad i \in \{1, \dots, N\} \\ \vartheta_{2,MOL}^{[N]}(x_{i-N-1}, t) & , \quad i \in \{N+1, \dots, 2N\} \end{cases} \quad (103)$$

sowie:

$$b_i^{[N]} = \begin{cases} \frac{v_1}{\Delta x} \vartheta_{1,ein} & , \quad i = 1 \\ \frac{v_2}{\Delta x} \vartheta_{2,ein} & , \quad i = 2N \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases} \quad (104)$$

$$c_i^{[N]} = \begin{cases} \vartheta_{1,0}(x_i) & , \quad i \in \{1, \dots, N\} \\ \vartheta_{2,0}(x_{i-N-1}) & , \quad i \in \{N+1, \dots, 2N\} \end{cases} \quad (105)$$

kann das Anfangswertproblem (96) - (101) geschrieben werden in der Form:

$$\frac{d}{dt} z^{[N]}(t) = A^{[N]} z^{[N]}(t) + b^{[N]}, \quad z^{[N]}(0) = c^{[N]} \quad (106)$$

mit:

$$z^{[N]}(t) = \left( z_i^{[N]}(t) \right)_{i=1, \dots, 2N} \quad (107)$$

$$A^{[N]} = \left( a_{jk}^{[N]} \right)_{j,k=1, \dots, 2N} \quad (108)$$

$$b^{[N]} = \left( b_i^{[N]} \right)_{i=1, \dots, 2N} \quad (109)$$

$$c^{[N]} = \left( c_i^{[N]} \right)_{i=1, \dots, 2N} \quad (110)$$

## 5 Anwendung Benchmarking

In diesem Abschnitt behandeln wir ein numerisches Beispiel, um die exakte (klassische) Lösung mit der numerischen MOL Lösung zu vergleichen. Alle Berechnungen wurden mit der Software Mathematica Version 9 durchgeführt. Für die numerische Lösung des Anfangswertproblems (106) wurde die NDSolve Routine verwendet und die Integrale in (82) wurden mit der Integrate Routine berechnet.

Zum Vergleich der exakten Lösung mit der MOL Lösung führen wir die folgenden Fehler ein:

$$e_{i,N}(x, t) = \left| \vartheta_i(x, t) - \vartheta_{i,MOL}^{[N]}(x, t) \right|, \quad i = 1, 2 \quad (111)$$

und betrachten einen Wärmetauscher mit den folgenden Daten:

$$\vartheta_{1, \text{ein}} = 60^\circ \text{C}, \quad \vartheta_{2, \text{ein}} = 20^\circ \text{C}, \quad T_1 = \frac{T}{10}, \quad T_2 = \frac{T}{8} \quad (112)$$

sowie:

$$v_1 = 8 \frac{L}{T}, \quad v_2 = \frac{4 L^2}{\pi^2 v_1 T_1 T_2} = \frac{40 L}{\pi^2 T} \quad (113)$$

Wegen

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{v_1 T_1 v_2 T_2}} = \frac{\pi}{2L} \quad (114)$$

ist die Bedingung (67) erfüllt. Satz 6. (a) liefert nun, dass für beliebige Konstanten  $C$  durch

$$\begin{aligned} \vartheta_1(x, t) &= u_1(x) + e^{\frac{(T_1 - T_2)x - (v_1 T_1 + v_2 T_2)t}{(v_1 + v_2) T_1 T_2}} C \sin(\omega_0 x) \\ &= u_1(x) + e^{-\frac{\pi^2}{4(\pi^2 + 5)} \frac{x}{L} - \left(\frac{8\pi^2 + 50}{\pi^2 + 5}\right) \frac{t}{T}} C \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \end{aligned} \quad (115)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_2(x, t) &= u_2(x) + e^{\frac{(T_1 - T_2)x - (v_1 T_1 + v_2 T_2)t}{(v_1 + v_2) T_1 T_2}} \omega_0 v_1 T_1 C \cos(\omega_0 x) \\ &= u_2(x) + e^{-\frac{\pi^2}{4(\pi^2 + 5)} \frac{x}{L} - \left(\frac{8\pi^2 + 50}{\pi^2 + 5}\right) \frac{t}{T}} \frac{2\pi}{5} C \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \end{aligned} \quad (116)$$

eine klassische Lösung des Anfangs- und Randwertproblems (1) - (6) mit den speziellen Anfangsbedingungen:

$$\vartheta_{1,0}(x) = u_1(x) + e^{-\frac{\pi^2}{4(\pi^2 + 5)} \frac{x}{L}} C \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \quad (117)$$

$$\vartheta_{2,0}(x) = u_2(x) + e^{-\frac{\pi^2}{4(\pi^2 + 5)} \frac{x}{L}} \frac{2\pi}{5} C \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \quad (118)$$

gegeben ist. Zur Bestimmung der Konstanten  $C$  wählen wir die Referenz-Anfangsprofile:

$$\vartheta_{1,0}^{\text{ref}}(x) = 20^\circ \text{C} + 40^\circ \text{C} e^{-2 \frac{x}{L}} \quad (119)$$

$$\vartheta_{2,0}^{\text{ref}}(x) = 20^\circ \text{C} \quad (120)$$

und erhalten mit (82) den Wert:

$$C = -22.7^\circ \text{C} \quad (121)$$

In Abbildung 1 sind oben die stationären Lösungen und die Anfangsprofile (gestrichelt) im Ortsintervall  $[0, L]$  und unten die exakten Lösungen in den Referenzpunkten  $x = 0.1 L, 0.5 L, L$  auf der Primärseite sowie  $x = 0, 0.5 L, 0.9 L$  auf der Sekundärseite im Zeitintervall  $[0, T]$  zu sehen.

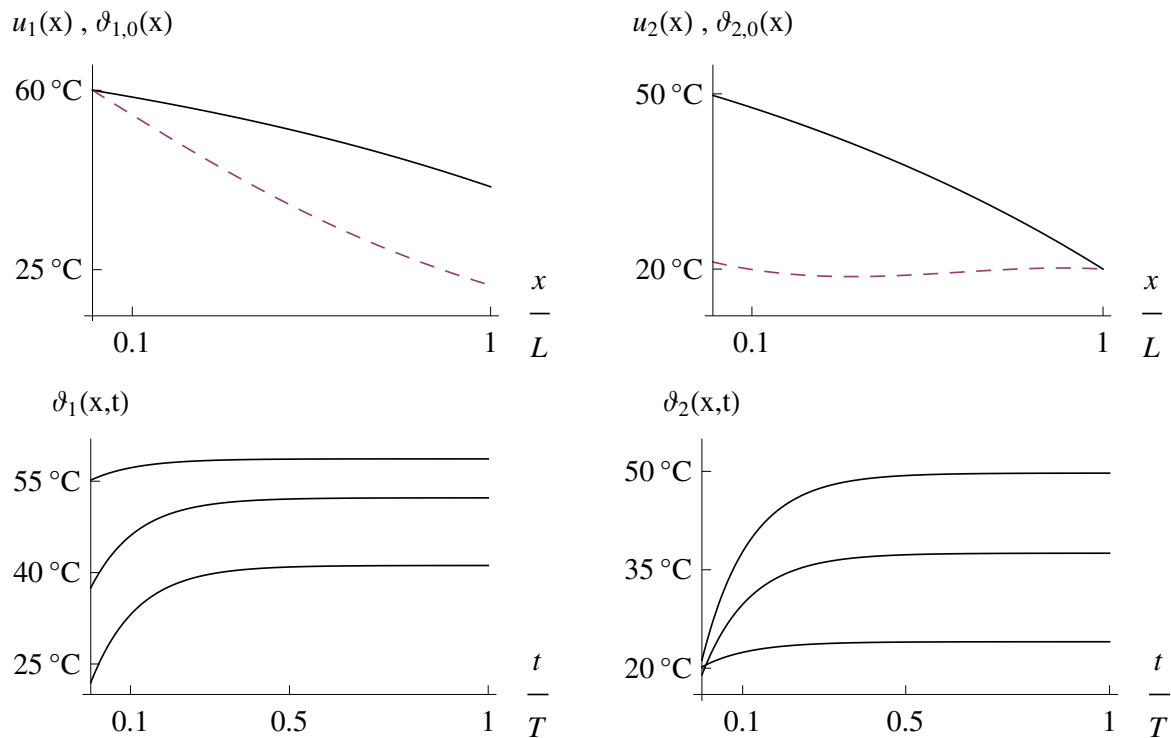


Abbildung 1: Oben: Stationäre Lösungen und Anfangsprofile (gestrichelt) im Ortsintervall  $[0, L]$ . Unten: Exakte Lösungen in den Referenzpunkten  $x = 0.1L, 0.5L, L$  auf der Primärseite und  $x = 0, 0.5L, 0.9L$  auf der Sekundärseite im Zeitintervall  $[0, T]$

Abbildung 2 zeigt die Fehler  $e_{i,N}(x, t)$  für  $N = 10$  in den Referenzpunkten im Zeitintervall  $[0, T]$ . Wie üblich, werden hier die Temperaturdifferenzen mit Kelvin (K) statt Grad Celsius bezeichnet. Es ist zu sehen, dass auf beiden Seiten der Fehler wächst, wenn sich der Referenzpunkt mehr vom Eintrittspunkt entfernt.

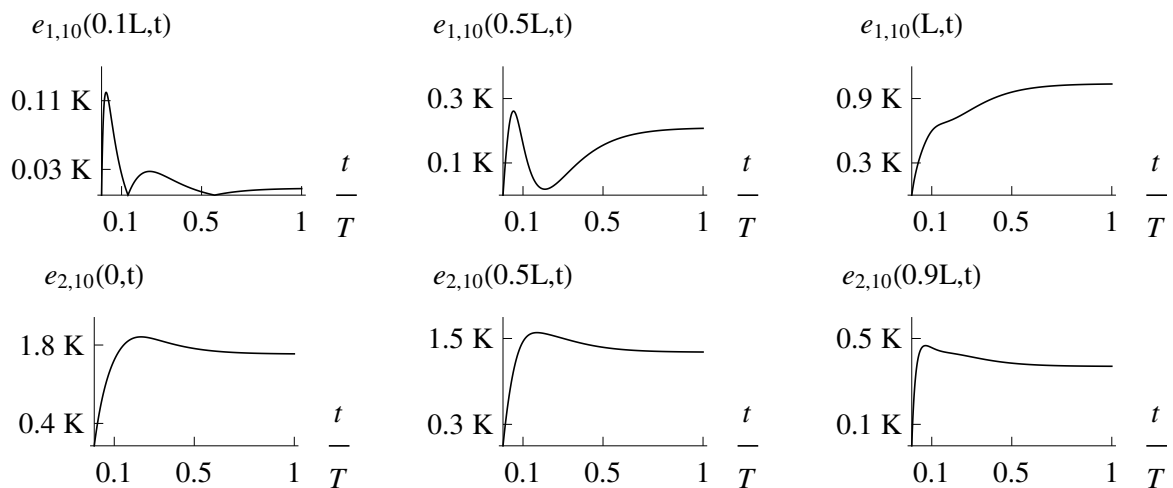


Abbildung 2: Fehler  $e_{i,10}(x, t)$  in den Referenzpunkten

Für größere Werte von  $N$  erhält man dann analoge Kurvenformen für die Fehler mit sinkenden Maxima. Zur besseren Übersicht werden hier nicht alle Fehlerplots gezeigt, sondern es werden die maximalen Fehler in den Referenzpunkten über das Zeitintervall  $[0, T]$  angegeben.

Hierfür führen wir die folgende Bezeichnung ein:

$$e_{i,N}^{max}(x) = \max_{t \in [0,T]} e_{i,N}(x, t), \quad i = 1, 2 \quad (122)$$

Tabelle 1 zeigt die berechneten Werte.

| $N$  | $e_{1,N}^{max}(0.1 L)$ | $e_{1,N}^{max}(0.5 L)$ | $e_{1,N}^{max}(L)$ | $e_{2,N}^{max}(0)$ | $e_{2,N}^{max}(0.5 L)$ | $e_{2,N}^{max}(0.9 L)$ |
|------|------------------------|------------------------|--------------------|--------------------|------------------------|------------------------|
| 10   | 0.12 $K$               | 0.26 $K$               | 1.1 $K$            | 1.95 $K$           | 1.6 $K$                | 0.46 $K$               |
| 100  | 0.015 $K$              | 0.03 $K$               | 0.11 $K$           | 0.21 $K$           | 0.18 $K$               | 0.058 $K$              |
| 1000 | 0.0016 $K$             | 0.0031 $K$             | 0.011 $K$          | 0.021 $K$          | 0.018 $K$              | 0.0058 $K$             |

Tabelle 1: Werte für die maximalen Fehler

Anhand der Werte in der Tabelle kann man sehr gut eine lineare Konvergenz bezüglich der Ortsdiskretisierung vermuten, was aufgrund der einfachen Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzen im Ort auch zu erwarten ist.

## 6 Abschließende Bemerkungen

Die in dieser Arbeit konstruierten klassischen Lösungen für das Anfangs- und Randwertproblem (1) - (6) können als Benchmark-Lösungen zum Testen numerischer Verfahren verwendet werden. In Abschnitt 5 wurde hier ein Beispiel gewählt, bei dem die Bedingung (67) erfüllt ist. Somit konnte Satz 6. (a) angewendet werden und die eine freie Konstante wurde durch den Minimierungsprozess zur Anpassung an vorgegebene Referenz-Anfangsprofile bestimmt.

Zu jeder vorgegebenen natürlichen Zahl  $k$  kann man stets die Geschwindigkeit so wählen, dass

$$v_1 < \frac{L}{\sqrt{T_1 T_2} \left( \frac{\pi}{2} + k \pi \right)} \quad (123)$$

und somit die Bedingung (70) erfüllt ist. Also kann Satz 6. (b) angewendet werden. Ist die Zahl  $k$  genügend groß, so können die durch (73) + (74) erzeugten Anfangsprofile an geeignete Referenz-Anfangsprofile durch die Bestimmung der Konstanten  $C_j$  angepasst werden. Diese Referenz-Anfangsprofile können dann so gewählt werden, dass die zu untersuchende numerische Methode entsprechend herausgefordert wird.

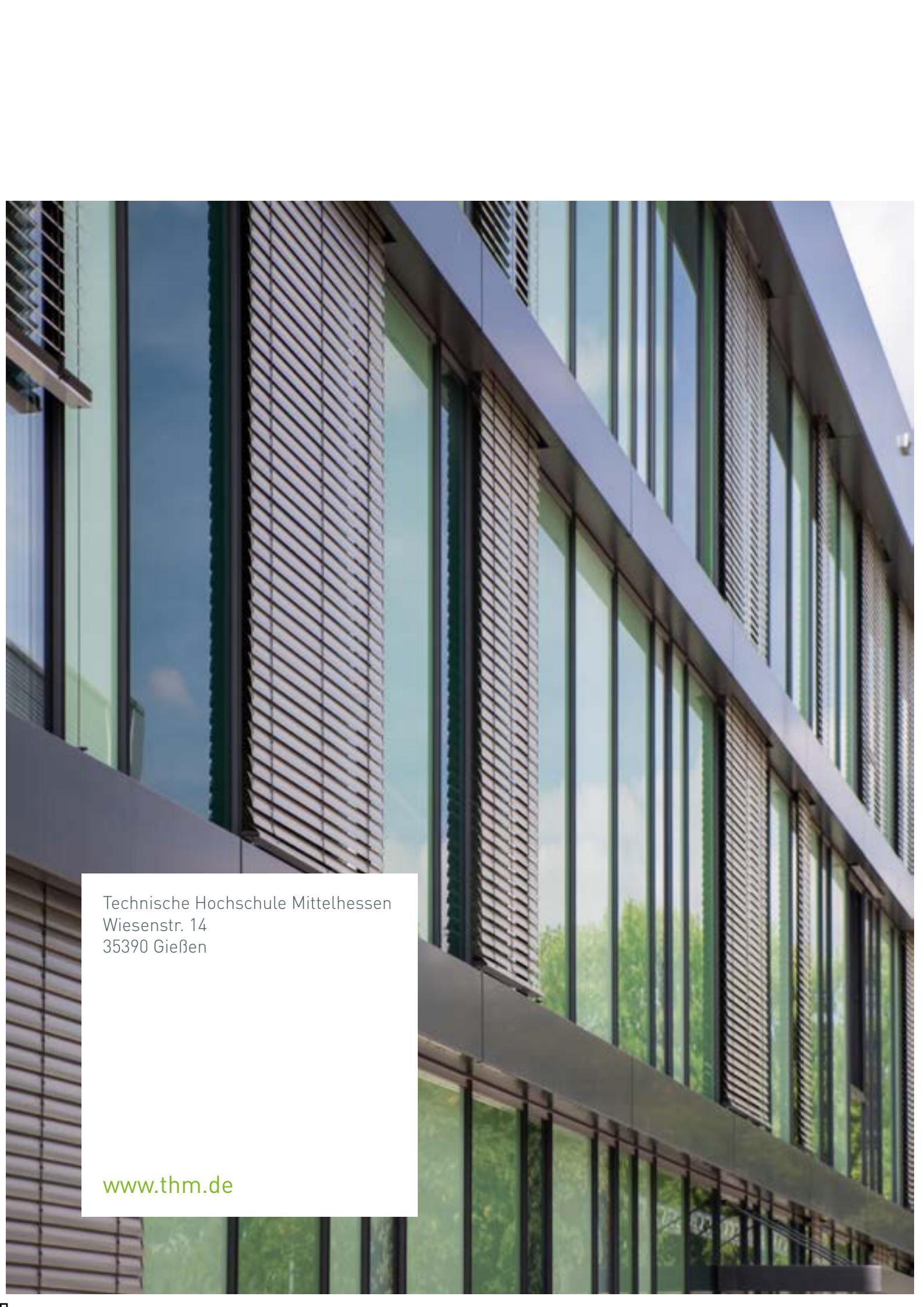
## Literatur

- [1] Frank Müller: Verallgemeinerte Lösungen für die Temperaturen in einem Gegenstrom-Wärmetauscher, THM Hochschulschriften Band 23 (2023) 1 - 15. DOI: 10.25716/thm-222
- [2] Frank Müller: Approximating the solution of the discharging process in a domestic hot water storage tank, Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems 27 (2021) 141 - 161. DOI: 10.1080/13873954.2021.1887277
- [3] Alberto Bressan: Hyperbolic Systems of Conservation Laws: The One-Dimensional Cauchy Problem, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications 20, Oxford University Press, New York, 2000.

- [4] L.C. Evans: Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, Volume 19, AMS, Providence, Rhode Island, 1998.
- [5] G.B. Folland: Introduction to Partial Differential Equations, Princeton University Press, Princeton (New Jersey), 1995.
- [6] M.A. Jaswon, W. Smith: Countercurrent transfer processes in the non-steady state, Proceedings of the Royal Society (1954) 226 - 244.
- [7] M. Abramowitz, I.A. Stegun: Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, Inc., New York, 1964.
- [8] D.D. Gvozdenac: Analytical Solution of Transient Response of Gas-to-Gas Parallel and Counterflow Heat Exchangers, J. Heat Transfer 109:4 (1987) 848 - 855.
- [9] D.D. Gvozdenac: Analytical solution for transient response of counter flow heat exchanger with finite wall capacitance, Heat and Mass Transfer 28 (1993) 351-356.
- [10] R. Kress: Linear Integral Equations, 2nd edition, Springer, Berlin, 1999.
- [11] Frank Müller and Werner Varnhorn: On approximation and numerical solution of Fredholm integral equations of second kind using quasi-interpolation, Applied Mathematics and Computation 217:13 (2011) 6409 - 6416. DOI: 10.1016/j.amc.2011.01.022
- [12] T. Kreuzinger, M. Bitzer, W. Marquardt: Mathematical modelling of a domestic heating system with stratified storage tank, Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems, 14:3 (2008) 231 - 248.
- [13] W.E. Schiesser: The Numerical Method of Lines. Integration of Partial Differential Equations, Academic Press, San Diego, 1991.
- [14] A.L. Nash, A. Badithela, N. Jain: Dynamic modelling of a sensible thermal energy storage tank with an immersed coil heat exchanger under three operation modes, Applied Energy 195 (2017) 877 - 889.
- [15] S.V. Patankar: Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, McGraw-Hill, New York, 1980.
- [16] R. LeVeque: Numerical Methods for Conservation Laws, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.





The image shows a modern building with a facade of large glass windows and a textured, metallic-looking material. The windows reflect the sky and surrounding greenery. The building has a clean, industrial design with dark frames around the windows.

Technische Hochschule Mittelhessen  
Wiesenstr. 14  
35390 Gießen

[www.thm.de](http://www.thm.de)