

Olaf Strelow

Allgemeines Berechnungsmodell für
elektrische Netze

THM-Hochschulschriften Band 3

Olaf Strelow

Allgemeines Berechnungsmodell für
elektrische Netze

THM-Hochschulschriften Band 3

THM-Hochschulschriften Band 3

© 2017 Olaf Strelow

Technische Hochschule Mittelhessen

Fachbereich Maschinenbau und Energietechnik

Herausgeber der THM-Hochschulschriften:

Der Präsident der Technischen Hochschule Mittelhessen

Alle Rechte vorbehalten, Nachdruck, auch auszugsweise, nur
mit schriftlicher Genehmigung und Quellenangabe.

Einzelne Hochschulschriften sind auch online abrufbar:

www.thm.de/bibliothek/thm-hochschulschriften

ISSN (Print) 2568-0846

ISSN (Online) 2568-3020

Inhaltsverzeichnis

1	Modellierung elektrischer Netze	5
1.1	Diskrete Netzeigenschaften	5
1.2	Stetige Netzeigenschaften	6
1.3	Der allgemeine Knotensatz	8
1.4	Der allgemeine Maschensatz	9
1.5	Das allgemeine Widerstandsgesetz	10
2	Modell für Gleichstromnetze	10
3	Modell für Wechselstromnetze	11
4	Modell für Dreiphasenwechselstromnetze	13
5	Vereinfachtes Schema der Modellierung	14
6	Beispiele	14
6.1	Gleichstromnetz	14
6.2	Wechselstromnetz	17
6.3	Dreiphasenwechselstromnetz	19
7	Zusammenfassung	22
8	Formelzeichen	23
8.1	Skalare	23
8.2	Vektoren	23
8.3	Matrizen	23
8.4	Indizes	23
9	Literatur	24

Allgemeines Berechnungsmodell für elektrische Netze

Prof. Dr.-Ing. O. Strelow

Technische Hochschule Mittelhessen - FB Maschinenbau Energietechnik
Institut für Thermodynamik, Energieverfahrenstechnik u. Systemanalyse

St. Tönis, 8.11.2017

Elektrische Netze sind wichtige Komponenten zahlreicher technischer Anwendungen, deren Einsatz sich von der Informations- und Nachrichtentechnik bis hin zur Energietechnik erstreckt. Für Betreiber komplexer technischer Systeme ist es wichtig die Eigenschaften und Besonderheiten des Verhaltens involvierter elektrischer Netze zu kennen, um in bestimmten Situationen verlässliche Vorhersagen treffen zu können.

Die Berechnung von Netzen für Gleichstrom, Wechselstrom sowie Dreiphasenwechselstrom geschieht meist sequentiell „per Hand“ d.h. die Struktur des Netzes wird durch schrittweise Zusammenfassung von Parallel- und Reihenschaltungen bis zum Erhalt der endgültigen Lösung vereinfacht. Etwas trickreich ist die Berechnung von Brückenschaltungen über den Umweg von Ersatzschaltungen. Alternativ existieren zahlreiche Rechenprogramme mit Lösungsansätzen, welche nicht einsehbar und damit auch nicht nachvollziehbar sind.

Der Computertechnik Rechnung tragend wurden Lösungsansätze vorgestellt, welche auf dem Matrizenkalkül basieren [1-3, 5-7]. Konrad Zuse sagte einmal: "Das Matrizenkalkül ist das Kleine Einmaleins des elektronischen Rechners". Diese Lösungsansätze basieren auf dem Knoten- und Maschensatz sowie dem Widerstandsgesetz. Im Sinne einer praktisch handhabbaren Ingenieursmathematik sind diese Ansätze nicht befriedigend.

Nachfolgend wird eine Berechnungsmethode für elektrische Netze vorgestellt, welche auf einer verallgemeinerten Netztheorie basiert [8]. Diese Allgemeine Theorie der Technischen Netze (ATN) vereinigt die mathematisch-physikalischen Grundprinzipien von elektrischen, hydraulischen und pneumatischen Netzen bis hin zu komplexen Systemen der Stoff- und Wärmeübertragung sowie zu logistisch-wirtschaftlichen Systemen.

Die vorgestellte Methode ermöglicht die geschlossene Berechnung beliebig strukturierter elektrischer Schaltungen. Die Anwendung der Methode erfordert lediglich Standardsoftware wie EXCEL, MathCad oder Scientific Workplace.

1 Modellierung elektrischer Netze

Unter einem elektrischen Netz wird nachfolgend die beliebige Verschaltung ohmscher, induktiver und kapazitiver Widerstände verstanden. Elektrische Netze weisen diskrete und stetige Eigenschaften auf. Diskrete Eigenschaften sind beispielsweise die Zahl von Netzknoten und Leitungen. Stetige Eigenschaften sind die Potenziale der Knoten, Ströme in den Leitungen sowie die Leitungswiderstände.

1.1 Diskrete Netzeigenschaften

Neben der Zahl von Knoten und Leitungen existieren weitere diskrete Netzeigenschaften, wie die Anzahl von Maschen sowie die Struktur des Netzes inklusive der Orte von Einspeise- und Entnahmeknoten.

Zwischen der Anzahl von Knoten, Leitungen, Maschen und Teilsystemen besteht ein mathematischer Zusammenhang, welcher am Beispiel des in Abbildung 1 dargestellten Netzes aufgezeigt wird:

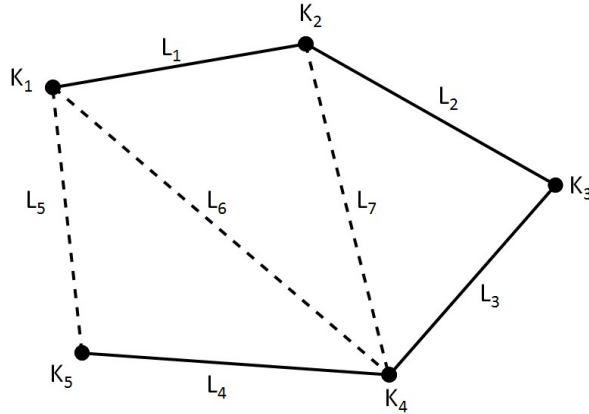


Abbildung 1: Beispiel eines allgemeinen Netzes mit fünf Knoten und sieben Leitungen

Das Netz gemäß Abbildung 1 weist fünf Knoten ($K_1, K_2, \dots, K_5$) auf. Werden die $k = 5$ Knoten mit $l = 4$ Leitungen (durchgezogene Linien) verbunden, entsteht genau ein Netz ohne Maschen ($n = 1, m = 0$). Für die Mindestanzahl von Leitungen gilt somit $l_{min} = k - 1$. Durch das Entfernen einer Leitung zerfällt das Netz in zwei Teilnetze ($n = 2$). Jede zusätzliche Leitung (gestrichelte Linien) erzeugt dagegen eine Masche ($m > 0$). Verallgemeinert gilt für n Netze: $m + k = l + n$. Diese Netzeigenschaften sind wichtig für die nachfolgenden Berechnungsmodelle.

Zur Beschreibung der Struktur eines elektrischen Netzes wird analog zur Modellierung von Gasnetzen und Plattenwärmeübertragern die Verwendung einer Kopplungsmatrix vorgeschlagen [9, 10]. Die Kopplungsmatrix $\underline{\mathbf{K}}$ beschreibt die Struktur des Netzes. Jede Zeile der Kopplungsmatrix repräsentiert einen Netzknoten und jede Spalte eine Leitung des Netzes, gemäß der Zählreihenfolge. Dies bedeutet für das Netz gemäß Abbildung 1 im Einzelnen: das Matrixelement $K(e, j) = -1$ bezeichnet den Knoten e als Eingang in Leitung j und das Matrixelement $K(a, j) = 1$ den Knoten a als Ausgang aus Leitung j .

Für die Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ des in Abbildung 1 dargestellten Netzes gilt:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Zur Lösung logistischer Fragestellungen, wie z.B. Planung, Steuerung und Optimierung besitzen weitere diskrete Eigenschaften von Netzen eine wichtige Bedeutung [9]. Dieses sind der Freiheitsgrad, der Entscheidungsraum sowie die Mengen von abhängigen und unabhängigen Leitungen. Diese Zusammenhänge werden in diesem Artikel nicht weiter behandelt.

1.2 Stetige Netzeigenschaften

Die stetigen Eigenschaften eines elektrischen Netzes sind die Spannungen der Netzknoten, die netzinternen Ströme der Leitungen zwischen den Knoten sowie die externen Ströme an den Ein- und Ausgangsknoten. Es ist günstig diese elektrischen Größen entsprechend ihrer Zählreihenfolge in Vektoren zusammenzufassen.

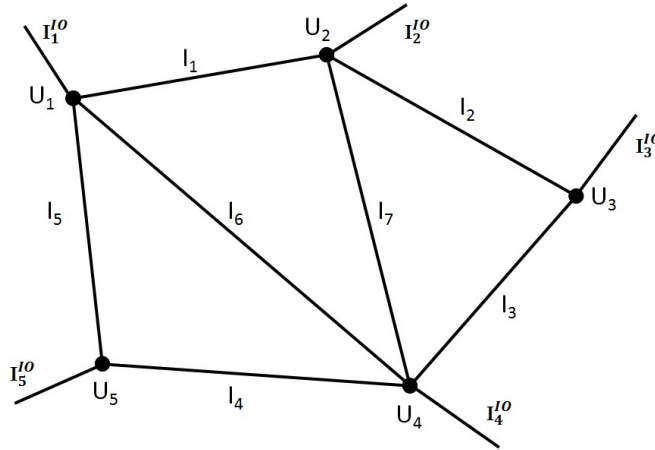


Abbildung 2: Elektrisches Netz mit Entnahmen und Einspeisungen

Am Beispiel des in Abbildung 2 dargestellten elektrischen Netzes mit fünf Knoten und sieben Leitungen werden die beschreibenden Matrizen und Vektoren dargestellt. Während die mathematische Beschreibung der stetigen Eigenschaften von Gleichstromnetzen mit reellen Zahlen erfolgt, erfordert die entsprechende Beschreibung von Wechselstromnetzen komplexe Zahlen.

Der Spannungsvektor $\underline{\mathbf{U}}$ beinhaltet die auf ein Nullniveau bezogenen Knotenspannungen. Der Spannungsvektor besteht aus einer reellen Komponente, der Wirkspannung $\underline{\mathbf{U}}_{\mathbf{w}}$ und der imaginären Komponente, der Blindspannung $j\underline{\mathbf{U}}_B$.

Es gilt:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ \underline{\mathbf{U}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{W1} \\ U_{W2} \\ U_{W3} \\ U_{W4} \\ U_{W5} \\ \underline{\mathbf{U}}_W \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} U_{B1} \\ U_{B2} \\ U_{B3} \\ U_{B4} \\ U_{B5} \\ j\underline{\mathbf{U}}_B \end{bmatrix} \quad (2)$$

Der Input-Output-Vektor $\underline{\mathbf{I}}^{io}$ enthält die an den Knoten ein- und ausgehenden externen Ströme. Ein positives Vorzeichen bedeutet Einspeisung, ein negatives Vorzeichen bedeutet Entnahme. Der Wert Null beschreibt einen neutralen Knoten ohne Einspeisung oder Entnahme. Der Input-Output-Vektor $\underline{\mathbf{I}}^{io}$ besteht aus einer reellen Komponente $\underline{\mathbf{I}}_W^{io}$ und einer imaginären Komponente $j\underline{\mathbf{I}}_B^{io}$.

$$\begin{bmatrix} I_1^{io} \\ I_2^{io} \\ I_3^{io} \\ I_4^{io} \\ I_5^{io} \\ \underline{\mathbf{I}}^{io} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{W1}^{io} \\ I_{W2}^{io} \\ I_{W3}^{io} \\ I_{W4}^{io} \\ I_{W5}^{io} \\ \underline{\mathbf{I}}_W^{io} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} I_{B1}^{io} \\ I_{B2}^{io} \\ I_{B3}^{io} \\ I_{B4}^{io} \\ I_{B5}^{io} \\ j\underline{\mathbf{I}}_B^{io} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Der Stromvektor $\underline{\mathbf{I}}$ umfasst sämtliche netzinternen Ströme. Die Flussrichtung ist implizit in der Kopplungsmatrix festgelegt. Ist der Strom I_j positiv fließt er vom Ausgangsknoten zum Eingangsknoten bzw. umgekehrt. Der Stromvektor $\underline{\mathbf{I}}$ besteht aus einer reellen Komponente $\underline{\mathbf{I}}_W$ und einer imaginären Komponente $j\underline{\mathbf{I}}_B$.

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ \underline{\mathbf{I}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{W1} \\ I_{W2} \\ I_{W3} \\ I_{W4} \\ I_{W5} \\ I_{W6} \\ I_{W7} \\ \underline{\mathbf{I}}_W \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} I_{B1} \\ I_{B2} \\ I_{B3} \\ I_{B4} \\ I_{B5} \\ I_{B6} \\ I_{B7} \\ j\underline{\mathbf{I}}_B \end{bmatrix} \quad (4)$$

Die Widerstandsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$ ist eine Diagonalmatrix und enthält die Widerstände der Leitungen eines elektrischen Netzes. Die Widerstandsmatrix besteht gemäß Gleichung 5 ebenfalls aus einer reellen Komponente $\underline{\underline{\mathbf{R}}}_W$ und einer imaginären Komponente $j\underline{\underline{\mathbf{R}}}_B$.

$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & R_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_7 \\ \underline{\underline{\mathbf{R}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{W1} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & R_{W2} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{W7} \\ \underline{\underline{\mathbf{R}}}_W \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} R_{B1} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & R_{B2} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{B7} \\ j\underline{\underline{\mathbf{R}}}_B \end{bmatrix} \quad (5)$$

Für die Zusammenhänge zwischen den quantitativen Eigenschaften eines elektrischen Netzes gelten der Knotensatz, der Maschensatz und das Widerstandsgesetz [4].

1.3 Der allgemeine Knotensatz

Der Knotensatz, auch das erste Kirchhoff'sche Gesetz genannt, ist die Bilanz von Ladungsträgern um einen Netzknoten. Aufgrund des Erhaltungssatzes für elektrische Ladungen ist die Summe ein- und austretender elektrischer Ströme eines Knotens im stationären Fall gleich Null. Sämtliche Knotenbilanzen eines Netzes sind als Gleichungssystem in Matrizen-schreibweise darstellbar. Der Knotensatz gilt für Wirk- und Blindströme.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_1 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_1^{io} \\ I_2^{io} \\ I_3^{io} \\ I_4^{io} \\ I_5^{io} \end{bmatrix} \\
 \underline{\mathbf{0}} &= \underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \underline{\mathbf{I}} + \underline{\mathbf{I}}^{io}
 \end{aligned} \tag{6}$$

Gleichung (6) beschreibt mit der Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ die Zusammenhänge zwischen den internen Strömen $\underline{\mathbf{I}}$ in den Leitungen und den externen Strömen $\underline{\mathbf{I}}^{io}$ an entsprechenden Ein- und Ausgangsknoten. Jede Zeile der Matrizengleichung ist als Bilanz um den jeweiligen Knoten aufzufassen.

Aufgrund der Gesamtbilanz des Netzes bzw. jedes Teilnetzes existieren n linear abhängige Gleichungen. D.h. die Matrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ weist mindestens eine linear abhängige Zeile auf. Somit ist pro Netz bzw. Teilnetz eine Zeile zu eliminieren. Mit der verbleibenden Anzahl linear unabhängiger Gleichungen sind mit den nachfolgenden Modellen Spannungsdifferenzen und Ströme zwischen den Knoten, jedoch keine absoluten Potenziale bestimmbar.

Das Auffinden der linear abhängigen Gleichungen erfolgt durch Anwendung des Gauß-Jordan-Algorithmus. Durch partielle Invertierung der Matrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ wird die Inverse $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$ erhalten. Nach Multiplikation von Gleichung (6) mit der Teil-Inversen $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$ wird Gleichung (7) erhalten. Die Nullzeile der modifizierten Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_J$ weist die linear abhängige Gleichung aus. Pro Netz bzw. Teilnetz entsteht jeweils eine Nullzeile.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_1 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1^{io} \\ I_2^{io} \\ I_3^{io} \\ I_4^{io} \\ I_5^{io} \end{bmatrix} \\
 \underline{\underline{\mathbf{K}}}_J \cdot \underline{\mathbf{I}} &= -\underline{\underline{\mathbf{J}}} \cdot \underline{\mathbf{I}}^{io}
 \end{aligned} \tag{7}$$

Darüber hinaus beschreibt die modifizierte Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_J$ in Gleichung (7) logistische Abhängigkeiten zwischen den internen Netzströmen, welche Basis für Systemanalysen und Optimierungen sind.

1.4 Der allgemeine Maschensatz

Der Maschensatz oder das zweite Kirchhoff'sche Gesetz beschreibt den Spannungsverlauf im Netz entlang eines geschlossenen Pfades. Da bei einem geschlossenen Pfad Anfangs- und Endpunkt identisch sind, ist die Summe der Spannungsdifferenzen gleich Null. Zu beachten sind die Vorzeichen der Spannungsdifferenzen entlang der Masche bei Berücksichtigung des Richtungssinns. Die transponierte Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^T$ formuliert den Zusammenhang der Spannungen an den Knoten $\underline{\mathbf{U}}$ und den Potenzialdifferenzen $\underline{\Delta\mathbf{U}}$ entlang der Netzverbindungen. Der Maschensatz ist auf Wirk- und Blindspannungen anwendbar.

$$\begin{bmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \Delta U_3 \\ \Delta U_4 \\ \Delta U_5 \\ \Delta U_6 \\ \Delta U_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\underline{\Delta\mathbf{U}} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T \cdot \underline{\mathbf{U}}$$

Die Maschen des Netzes werden durch Anwendung des Gauß-Jordan-Algorithmus als Eigenschaft der Matrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^T_J$ sichtbar. Nach Multiplikation mit der erhaltenen Teil-Inversen $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$ folgt.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \Delta U_3 \\ \Delta U_4 \\ \Delta U_5 \\ \Delta U_6 \\ \Delta U_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{J}}} \underline{\Delta\mathbf{U}} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T_J \underline{\mathbf{U}}$$

Die modifizierte Matrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^T_J$ enthält drei Nullzeilen. Die entsprechenden Zeilen der Inversen $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$ weisen die Maschen der Schaltung in Abbildung 2 aus. Eine Masche ist die Menge von Leitungen deren Ordinalzahl dem Spaltenindex der von Null verschiedenen Elemente entspricht. Gemäß der Multiplikationsregel Matrix-Vektor ergeben sich die Summen der Spannungsdifferenzen entlang einer Masche zu Null.

Die „Maschenzeilen“ der Matrix $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$ enthalten gemeinsame Sequenzen. Diese Sequenzen werden durch gezieltes Addieren von Zeilen eliminiert, so dass die unteren Zeilen der Matrix $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$ drei Minimale Maschen aufzeigen (vgl. Abbildung 1).

Es folgt:

$$\begin{bmatrix} M_1^{Min} \\ M_2^{Min} \\ M_3^{Min} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \Delta U_3 \\ \Delta U_4 \\ \Delta U_5 \\ \Delta U_6 \\ \Delta U_7 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\underline{\mathbf{M}}^{Min} = \underline{\mathbf{J}}_0^{Min} \cdot \underline{\Delta \mathbf{U}}$$

Eine minimale Masche ist eine Masche mit minimaler Zahl involvierter Verbindungen, welche nicht als Summe anderer Maschen darstellbar ist (siehe Bild 1).

1.5 Das allgemeine Widerstandsgesetz

Das Widerstandsgesetz oder Ohm'sches Gesetz stellt mit der Widerstandsmatrix $\underline{\mathbf{R}}$ den linearen Zusammenhang der Spannungsdifferenzen $\underline{\Delta \mathbf{U}}$ zwischen den Knoten und den inneren Strömen $\underline{\mathbf{I}}$ der Leitungen zwischen diesen Knoten her. Das negative Vorzeichen besagt, dass die Flussrichtung des Stromes stets in Gegenrichtung zum Spannungsanstieg verläuft. Es gilt die Matrizengleichung für Wirk- und Blindwiderstände:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_7 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \Delta U_3 \\ \Delta U_4 \\ \Delta U_5 \\ \Delta U_6 \\ \Delta U_7 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\underline{\mathbf{I}} = -\underline{\mathbf{R}}^{-1} \cdot \underline{\Delta \mathbf{U}}$$

Das Widerstandsgesetz verknüpft die extensiven Größen des Knotensatzes mit den intensiven Größen des Maschensatzes.

2 Modell für Gleichstromnetze

Mit dem Knoten-, dem Maschensatz sowie dem Widerstandsgesetz ist es möglich, eine allgemeine geschlossene Lösung zur Berechnung elektrischer Netze, im Besonderen für Gleichstromnetze zu erhalten. Mit den Gleichungen für Knotensatz, Maschensatz und Widerstandsgesetz gilt zusammenfassend:

$$\underline{\mathbf{I}}^{io} = -\underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{R}}^{-1} \underline{\Delta \mathbf{U}} = \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{R}}^{-1} \underline{\mathbf{K}}^T \underline{\mathbf{U}} \quad (12)$$

Gleichung (12) folgt aus dem Knotensatz (6) durch Einsetzen des Widerstandsgesetzes (11) und anschließend Einsetzen des Maschensatzes (8). Es entsteht eine Beziehung zwischen den externen Strömen der Ein- und Ausgangknoten und den Knotenspannungen.

Die Matrizengleichung (12) enthält eine interessante Beziehung für die in der Elektrotechnik gebräuchliche Admittanz-Matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\mathbf{R}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T \quad (13)$$

Mit der Admittanzmatrix ergeben sich die allgemeinen Lösungen für den Vektor der Knotenspannungen $\underline{\mathbf{U}}$ und den Vektor der internen Ströme $\underline{\mathbf{I}}$ als Funktionen der zu- und abgeführten externen Ströme $\underline{\mathbf{I}}^{io}$:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{U}} &= \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \underline{\mathbf{I}}^{io} \\ \underline{\mathbf{I}} &= -\underline{\underline{\mathbf{R}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \underline{\mathbf{I}}^{io} \end{aligned} \quad (14)$$

Aufgrund der linear abhängigen Zeilen der Matrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ ist die Admittanzmatrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ zunächst singulär. Die Lösbarkeit von Gleichung (14) wird durch Eliminieren der linear abhängigen Zeilen der Matrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ erreicht. Die Potenziale der Knoten, welche den eliminierten Zeilen entsprechen sind damit formal Null. Da ohnehin keine absoluten Spannungen, sondern nur Spannungsdifferenzen zwischen den Knoten mathematisch eindeutig bestimmbar sind, kann zum erhaltenen Lösungsvektor der Spannungen $\underline{\mathbf{U}}$ für jedes Teilnetz eine beliebige Spannung U_N addiert werden. Der Betrag der Spannung U_N ist derart zu wählen, dass die äußeren Anschlussbedingungen des Netzes erfüllt sind.

Durch partielle Invertierung [10] der quadratischen Admittanz-Matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ ist es möglich, einzelne bekannte und unbekannte Größen der Vektoren $\underline{\mathbf{I}}^{io}$ und $\underline{\mathbf{U}}$ zu tauschen, um somit beliebige Netzbedingungen und -vorgaben iterationslos zu berücksichtigen.

3 Modell für Wechselstromnetze

Die Berechnung eines Wechselstromnetzes erfolgt völlig analog zum Gleichstromnetz. Die Besonderheiten des Wechselstromes erfordern nur wenige Modifikationen. Zur Formulierung des Maschensatzes für Wirk- und Blindströme wird die Kompaktdarstellung vorgeschlagen:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{K}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{K}}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{I}}_W \\ \underline{\mathbf{I}}_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{I}}_W^{io} \\ \underline{\mathbf{I}}_B^{io} \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} &= \underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \underline{\underline{\mathbf{I}}}^{io} \end{aligned} \quad (15)$$

Gemäß Kompaktdarstellung umfassen die beschreibenden Vektoren und Matrizen in der oberen Hälfte die Wirkgrößen, in der unteren die Blindgrößen. Formal koexistieren zwei unabhängige Netze, ein reelles und ein imaginäres Netz, welche durch identische Kopplungsmatrizen repräsentiert werden. Diese bilden zusammen mit zwei Nullmatrizen identischen Formates die erweiterte Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$.

In derselben Weise wird der Maschensatz für zwei Netze erweitert. Es folgt:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{\Delta \mathbf{U}}_W \\ \underline{\Delta \mathbf{U}}_B \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{U}}_W \\ \underline{\mathbf{U}}_B \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{\Delta \mathbf{U}}} &= \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{U}}} \end{aligned} \quad (16)$$

Gleichung (16) beschreibt das Spannungsprofil für beide Netze, das reelle und das imaginäre Netz.

Ein Wechselstromnetz umfasst neben ohmschen Widerständen noch induktive und kapazitive Widerstände. Im Gegensatz zu ohmschen Widerständen hängen die induktiven und kapazitiven Widerstände von der Netzfrequenz ab. Für den induktiven Widerstand gilt:

$$R_L = j \, 2\pi f \, L \quad (17)$$

Für den kapazitiven Widerstand gilt:

$$R_C = \frac{-j}{2\pi f \, C} \quad (18)$$

Es ist möglich das ohmsche Gesetz für Wirk- und Blindgrößen als Matrixengleichung in Kompaktdarstellung unter Vermeidung komplexer Zahlen zu formulieren. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die Rechenregeln für komplexe Zahlen implizit berücksichtigt werden. Das Widerstandsgesetz verknüpft Wirk- und Blindgrößen.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{I}}_W \\ \underline{\mathbf{I}}_B \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{R}}_W & -\underline{\mathbf{R}}_B \\ \underline{\mathbf{R}}_B & \underline{\mathbf{R}}_W \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\Delta \mathbf{U}}_W \\ \underline{\Delta \mathbf{U}}_B \end{bmatrix} \\ \underline{\tilde{\mathbf{I}}} &= -\underline{\tilde{\mathbf{R}}}^{-1} \cdot \underline{\tilde{\Delta \mathbf{U}}} \end{aligned} \quad (19)$$

Durch Zusammenfassung der Gleichungen (15), (16) und (19) folgt die allgemeine Beziehung für die Admittanzmatrix $\underline{\tilde{\mathbf{A}}}$.

$$\underline{\tilde{\mathbf{A}}} = \underline{\tilde{\mathbf{K}}} \cdot \underline{\tilde{\mathbf{R}}}^{-1} \cdot \underline{\tilde{\mathbf{K}}}^T \quad (20)$$

Die Admittanzmatrix ermöglicht allgemeine geschlossene Lösungen für die komplexen Knotenspannungen und internen Ströme.

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{\mathbf{U}}} &= \underline{\tilde{\mathbf{A}}}^{-1} \underline{\tilde{\mathbf{I}}} \\ \underline{\tilde{\mathbf{I}}} &= -\underline{\tilde{\mathbf{R}}}^{-1} \underline{\tilde{\mathbf{K}}}^T \underline{\tilde{\mathbf{A}}}^{-1} \underline{\tilde{\mathbf{I}}} \end{aligned} \quad (21)$$

Aus den berechneten Wirk- und Blindgrößen sind sekundäre elektrische Größen, wie z.B. die Phasenverschiebung von Strom und Spannung berechenbar.

4 Modell für Dreiphasenwechselstromnetze

Zur Berechnung eines Netzes für Dreiphasenwechselstrom ist eine Erweiterung des bisher dargestellten Wechselstrommodells erforderlich. Beim Dreiphasenwechselstrom existieren drei um 120° verschobene Wechselspannungen (L_1 , L_2 und L_3), deren Wirk- und Blindgrößen vektoriell zu addieren sind [4].

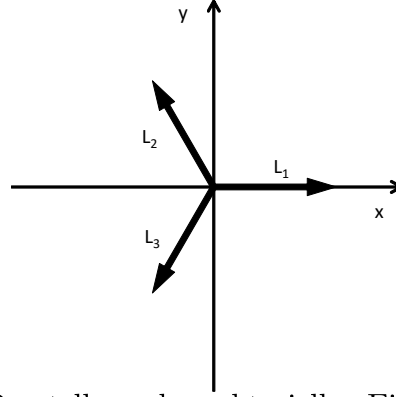


Abbildung 3: Darstellung der vektoriellen Eigenschaften des Dreiphasenwechselstroms

Somit können die elektrischen Größen Spannung $\underline{\tilde{U}}$ und Stromstärke $\underline{\tilde{I}}$ aus zwei Komponenten bestehend, in x-Richtung und y-Richtung aufgefasst werden. Für die Komponenten der Spannung $\underline{\tilde{U}}$ gilt:

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{U}}_x &= \underline{\tilde{U}}_{L1} - \frac{1}{2}\underline{\tilde{U}}_{L2} - \frac{1}{2}\underline{\tilde{U}}_{L3} \\ \underline{\tilde{U}}_y &= 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\underline{\tilde{U}}_{L2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\underline{\tilde{U}}_{L3} \end{aligned} \quad (22)$$

Analog gilt für die Stromstärke

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{I}}_x &= \underline{\tilde{I}}_{L1} - \frac{1}{2}\underline{\tilde{I}}_{L2} - \frac{1}{2}\underline{\tilde{I}}_{L3} \\ \underline{\tilde{I}}_y &= 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\underline{\tilde{I}}_{L2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\underline{\tilde{I}}_{L3} \end{aligned} \quad (23)$$

Es ist leicht einsehbar, dass für die Klemmspannungen und Einspeiseströme eines Knotens im konkreten Fall immer nur einer der drei Summanden (L_1 , L_2 und L_3) in der Beziehungen (22) und (23) genutzt wird.

Unter Verwendung der Admittanz-Matrix $\underline{\tilde{A}}$ gemäß Gleichung (20) ergeben sich folgende geschlossene Lösungen für die Spannungen $\underline{\tilde{U}}$ und die inneren Ströme $\underline{\tilde{I}}$.

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{U}}_x &= \underline{\tilde{A}}^{-1\sim io} \underline{\tilde{I}}_x & \underline{\tilde{U}}_y &= \underline{\tilde{A}}^{-1\sim io} \underline{\tilde{I}}_y \\ \underline{\tilde{I}}_x &= -\underline{\tilde{R}}^{-1} \underline{\tilde{K}}^T \underline{\tilde{A}}^{-1\sim io} \underline{\tilde{I}}_x & \underline{\tilde{I}}_y &= -\underline{\tilde{R}}^{-1} \underline{\tilde{K}}^T \underline{\tilde{A}}^{-1\sim io} \underline{\tilde{I}}_y \end{aligned} \quad (24)$$

Aus den Lösungen der Gleichungen (24) sind weitere resultierende elektrische Größen mit den Regeln der Vektorrechnung bestimmbar.

5 Vereinfachtes Schema der Modellierung

Es ist möglich das vorgestellte Berechnungsmodell zu vereinfachen. Dies ist besonders bei der Verwendung von Software für Tabellenkalkulation sinnvoll. Kernstück der Vereinfachung ist die Systemmatrix. Die Systemmatrix $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ besteht aus Untermatrizen, der Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ und Widerstandsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$ für Gleich- bzw. Gegenstromnetze. Sie bildet mit dem Zustandsvektor $\underline{\underline{\mathbf{Z}}}$, welcher die elektrischen Zustandsgrößen (innere Ströme und Spannungen) enthält, die linke Seite des Gleichungssystems. Die rechte Seite der Gleichung besteht aus einer Einheitsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$, einer Nullmatrix $\underline{\underline{\mathbf{0}}}$ sowie dem Vektor der Ein- und Ausgangsströme $\underline{\underline{\mathbf{I}^{io}}}$.

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{0}}} & -\underline{\underline{\mathbf{K}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{R}}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{U}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{I}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{E}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{\mathbf{I}^{io}}} \quad (25)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{Z}}} = \underline{\underline{\mathbf{E}}}^* \cdot \underline{\underline{\mathbf{I}^{io}}}$$

Ein elektrisches System ist immer Teil eines übergeordneten Systems. Die eindeutige Berechnung eines Netzes erfordert daher Vorgaben seiner Umgebung. Diese sind für jeden Knoten, welchem eine linear unabhängige Gleichung zuordenbar ist, die Klemmspannung oder der ein- oder ausgespeiste Strom. Die Knotenspannungen $\underline{\underline{\mathbf{U}}}$ befinden sich im oberen Teil und die Ströme der Leitungen im unteren Teil des Zustandsvektors $\underline{\underline{\mathbf{Z}}}$. Die ein- und ausgespeisten Ströme sind im Vektor $\underline{\underline{\mathbf{I}^{io}}}$ enthalten. Je nach äußeren Vorgaben sind im Gleichungssystem einzelne Spannungen mit den jeweiligen ein- und ausgespeisten Strömen zu tauschen. Selbstverständlich sind die entsprechenden Spalten der Matrizen $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ und $\underline{\underline{\mathbf{E}}}^*$ ebenfalls zu tauschen. Das Vorzeichen der Matrixelemente wechselt dabei, analog der Regeln zum Umstellen von Gleichungen. Die Lösung des Gleichungssystems erfolgt durch Multiplikation mit der inversen u.U. spaltenvertauschten System-Matrix (partielle Invertierung).

6 Beispiele

6.1 Gleichstromnetz

In Abbildung 4 ist ein Gleichstromnetz inform einer im klassischen Sinne nicht trivial berechenbaren Brückenschaltung dargestellt. Dieses Netz wird nachfolgend bei Vorgabe des eingespeisten Stromes sowie bei Vorgabe der Spannung berechnet. Für die ohmschen Widerstände des Gleichstromnetzes gilt: $R_1 = 2\Omega$; $R_2 = 4\Omega$; $R_3 = 4\Omega$; $R_4 = 9\Omega$; $R_5 = 4\Omega$

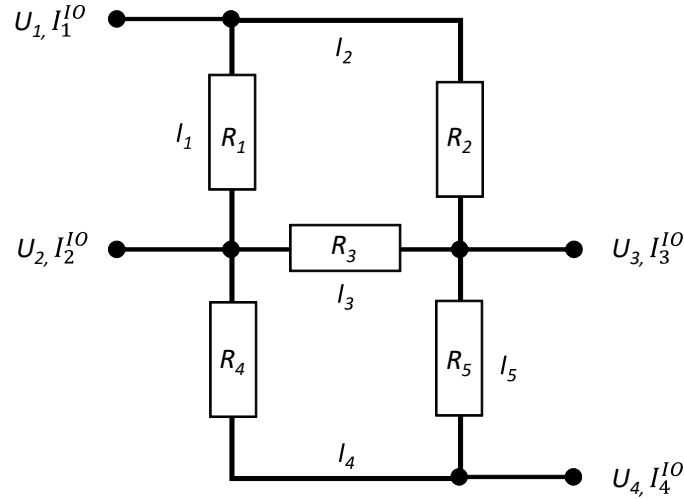


Abbildung 4: Beispiel eines Gleichstromnetzes als Brückenschaltung
Die Struktur der Schaltung beschreibt die Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$.

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Aufgrund der im 2. Abschnitt beschriebenen linearen Abhängigkeiten der Knotenbilanzen ist die fünfte Zeile zu entfernen. Damit ist die Spannung des fünften Knoten gleich Null. Der ein- bzw. ausgespeiste Strom des fünften Knotens weist implizit den Wert auf, welcher die Strombilanz der Schaltung erfüllt.

Die Kopplungsmatrix ist gemäß Gleichung (25) in die Systemmatrix $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ einzubauen. Die ohmschen Widerstände bilden die Hauptdiagonale der Widerstandsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$. Nach Einsetzen in Gleichung (25) folgt

$$\left[\begin{array}{ccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 1 & 0 & R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 \end{array} \right] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^{io} \\ I_2^{io} \\ I_3^{io} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Werden in den ersten Knoten der Strom $I_1^{io} = 11A$, in die Knoten zwei und drei kein Strom ein- bzw. ausgespeist, folgt implizit für den vierten Knoten $I_4^{io} = -11A$. Für die Lösungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ gilt

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1\Omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 6\Omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\Omega & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\Omega & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\Omega \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Nach Einsetzen der Zahlenwerte für die Widerstände ergibt die Matrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ nach Multiplikation mit dem Vektor der Ein- und austretenden Ströme $\underline{\mathbf{I}}^{io}$ den Zustandsvektor mit den Knotenspannungen $\underline{\mathbf{U}}$ und internen Strömen $\underline{\mathbf{I}}$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \frac{1}{55} \begin{bmatrix} 132 \Omega & 88 \Omega & 66 \Omega \\ 88 \Omega & 92 \Omega & 64 \Omega \\ 66 \Omega & 64 \Omega & 78 \Omega \\ 44 & -4 & 2 \\ 11 & 4 & -2 \\ 22 & 28 & -14 \\ 22 & 23 & 16 \\ 33 & 32 & 39 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \text{ A} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72 \text{ V} \\ 48 \text{ V} \\ 36 \text{ V} \\ 24 \text{ A} \\ 6 \text{ A} \\ 12 \text{ A} \\ 12 \text{ A} \\ 18 \text{ A} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Häufig liegt eine Aufgabenstellung vor, bei welcher statt der eingespeisten Ströme angelegte Klemmspannungen der Knoten bekannt sind. Die Eindeutigkeit einer Aufgabenstellung erfordert bei einem Netz oder Teilnetz mit k Knoten die Vorgabe von angelegter Spannung oder ein- bzw. ausgespeistem Strom an $k - n$ Knoten. Dies bedeutet, dass für bestimmte Knoten die bekannten und unbekannte Variablen zu vertauschen sind. Für das obige Beispiel gilt bei Vorgabe einer Klemmspannung am ersten Knoten von $U_1 = 72\text{V}$.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1\Omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6\Omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\Omega & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\Omega & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^{io} \\ U_2 \\ U_3 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2^{io} \\ I_3^{io} \end{bmatrix} \quad (30)$$

In Gleichung (30) sind die Variablen I_1^{io} und U_1 getauscht. Analog zum Umstellen einer Gleichung sind ebenfalls die entsprechenden Spalten der Matrizen $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ und $\underline{\underline{\mathbf{E}}}^*$ des Gleichungssystems mit Vorzeichenwechsel zu vertauschen. Mit diesem Schritt wird die anschließende partielle Invertierung vorbereitet. Es folgt die Lösungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1\Omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6\Omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\Omega & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\Omega & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\Omega \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Aus der Lösungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ folgt der Zustandsvektor $\underline{\mathbf{Z}}$ mit den unbekannten Größen

$$\begin{bmatrix} I_1^{io} \\ U_2 \\ U_3 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{132} \begin{bmatrix} 55 \Omega^{-1} & -88 & -66 \\ & 88 & 80 \Omega & 48 \Omega \\ & 66 & 48 \Omega & 108 \Omega \\ 44 \Omega^{-1} & -80 & -48 \\ 11 \Omega^{-1} & -8 & -18 \\ 22 \Omega^{-1} & 32 & -60 \\ 22 \Omega^{-1} & 20 & 12 \\ 33 \Omega^{-1} & 24 & 54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 72 \text{ V} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \text{ A} \\ 48 \text{ V} \\ 36 \text{ V} \\ 24 \text{ A} \\ 6 \text{ A} \\ 12 \text{ A} \\ 12 \text{ A} \\ 18 \text{ A} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Man kann sich leicht von der Konsistenz der beiden Lösungen überzeugen.

6.2 Wechselstromnetz

In Abbildung 5 ist ein Wechselstromnetz mit einem ohmschen, einem induktiven und einem kapazitiven Widerstand dargestellt. Für die mit komplexen Zahlen formulierten Widerstände gilt: $R_1 = (4 + 0j) \Omega$; $R_2 = (0 - 16j) \Omega$; $R_3 = (0 + 8j) \Omega$

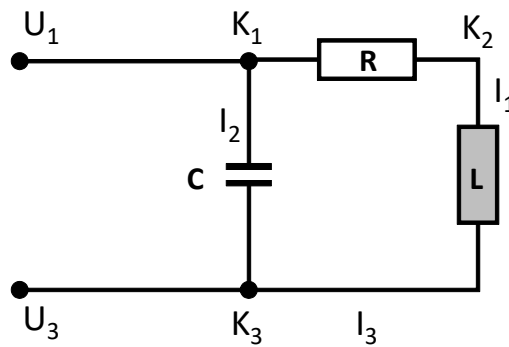


Abbildung 5: Wechselstromnetz mit je einem ohmschen, induktiven und kapazitiven Widerstand

Die Formulierung der Kopplungsmatrix der in Abbildung 5 dargestellten Schaltung geschieht nach den bekannten Regeln:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Die Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ wird nach Eliminieren der Zeile des dritten Knotens zusammen mit den Wirk- und Blindwiderständen gemäß der Gleichungen (19) und (25) in die Systemmatrix $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ eingebaut.

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \left[\begin{array}{cc|cc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 & R_{W1} & 0 & 0 & -R_{B1} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{W2} & 0 & 0 & -R_{B2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{W3} & 0 & 0 & -R_{B3} \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 & R_{B1} & 0 & 0 & R_{W1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & R_{B2} & 0 & 0 & R_{W2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & R_{B3} & 0 & 0 & R_{W3} \end{array} \right] \quad (34)$$

Der Aufbau der Strukturmatrix $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ zeigt die mathematische Überlagerung eines „reellen“ und eines „imaginären“ elektrischen Netzes. In den ersten Knoten wird ein Strom $I_1 = (4 - 3j) A$. In den zweiten Knoten erfolgt keine Einspeisung oder Entnahme. Implizit wird dem dritten Knoten der Strom $I_3 = (-4 + 3j) A$ entnommen. Nach Einsetzen der Werte für Wirk- und Blindwiderstände folgt die Lösungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}}}^*$

$$\begin{bmatrix} U_{W1} \\ U_{W2} \\ U_{B1} \\ U_{B2} \\ I_{W1} \\ I_{W2} \\ I_{W3} \\ I_{B1} \\ I_{B2} \\ I_{B3} \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 64 \Omega & 32 \Omega & -48 \Omega & -64 \Omega \\ 32 \Omega & 16 \Omega & -64 \Omega & -72 \Omega \\ 48 \Omega & 64 \Omega & 64 \Omega & 32 \Omega \\ 64 \Omega & 72 \Omega & 32 \Omega & 16 \Omega \\ 8 & 4 & 4 & 2 \\ -3 & -4 & -4 & -2 \\ 8 & 9 & 4 & 2 \\ -4 & -2 & 8 & 4 \\ 4 & 2 & -3 & -4 \\ -4 & -2 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4A \\ 0 \\ -3A \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80V \\ 64V \\ 0 \\ 32V \\ 4A \\ 0 \\ 4A \\ -8A \\ 5A \\ -8A \end{bmatrix} \quad (35)$$

Bei Vorgabe der Klemmspannungen $U_{W1} = 80V$ und $U_{B1} = 0$ am ersten Knoten folgt nach partieller Invertierung (siehe Beispiel Gleichstrom).

$$\begin{bmatrix} I_{W1}^{io} \\ U_{W2} \\ I_{B1}^{io} \\ U_{B2} \\ I_{W1} \\ I_{W2} \\ I_{W3} \\ I_{B1} \\ I_{B2} \\ I_{B3} \end{bmatrix} = \frac{1}{80} \begin{bmatrix} 4\Omega^{-1} & -64 & 3\Omega^{-1} & 32 \\ 64 & 256\Omega & -32 & -128\Omega \\ -3\Omega^{-1} & -32 & 4\Omega^{-1} & -64 \\ 32 & 128\Omega & 64 & 256\Omega \\ 4\Omega^{-1} & -64 & 8\Omega^{-1} & 32 \\ 0 & 0 & -5\Omega^{-1} & 0 \\ 4\Omega^{-1} & 16 & 8\Omega^{-1} & 32 \\ -8\Omega^{-1} & -32 & 4\Omega^{-1} & -64 \\ 5\Omega^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -8\Omega^{-1} & -32 & 4\Omega^{-1} & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80V \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4A \\ 64V \\ -3A \\ 32V \\ 4A \\ 0 \\ 4A \\ -8A \\ 5A \\ -8A \end{bmatrix} \quad (36)$$

Offensichtlich sind beide Lösungen für die Wechselstromschaltung konsistent.

6.3 Dreiphasenwechselstromnetz

In Abbildung 6 zeigt eine Stern-Schaltung mit ohmschen und induktiven Widerständen, an welcher eine Dreiphasenwechselspannung anliegt. Für die Widerstände gilt: $R_1 = R_2 = R_3 = (40 + 20j) \Omega$

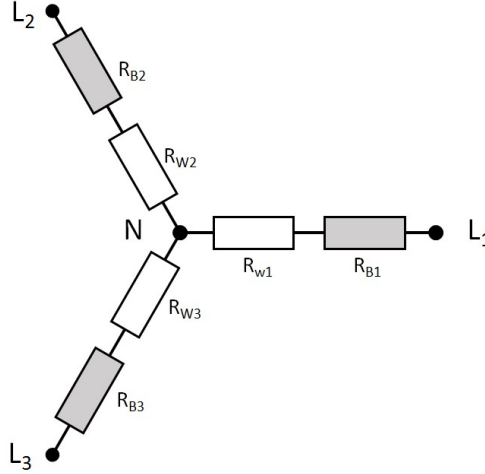


Abbildung 6: Sternschaltung mit ohmschen und induktiven Widerständen

In diesem Beispiel wird die Möglichkeit gezeigt, in Reihe geschaltete ohmsche und nichtohmsche Widerstände in der Widerstandsmatrix $\underline{\underline{\tilde{\mathbf{R}}}}$ zusammenzufassen.

Für die vereinfachte Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ gilt:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Nach Eliminierung der unteren Zeile der Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ wird diese gemäß Gleichung (15) und (16) in die Kopplungsmatrix für Wechselstromnetze $\underline{\underline{\tilde{\mathbf{K}}}}$ eingefügt.

$$\underline{\underline{\tilde{\mathbf{K}}}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \quad (38)$$

Gemäß Gleichung (19) erfolgt der Aufbau der Widerstandsmatrix $\underline{\underline{\tilde{\mathbf{R}}}}$

$$\underline{\underline{\tilde{\mathbf{R}}}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} R_{W1} & 0 & 0 & -R_{B1} & 0 & 0 \\ 0 & R_{W2} & 0 & 0 & -R_{B2} & 0 \\ 0 & 0 & R_{W3} & 0 & 0 & -R_{B3} \\ \hline R_{B1} & 0 & 0 & R_{W1} & 0 & 0 \\ 0 & R_{B2} & 0 & 0 & R_{W2} & 0 \\ 0 & 0 & R_{B3} & 0 & 0 & R_{W3} \end{array} \right] \quad (39)$$

Die Systemmatrix $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ wird nach Gleichung (25) erstellt. Sie führt gemäß Gleichung (28) zur Lösungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$.

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} 40 \, \Omega & 0 & 0 & -20 \, \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 40 \, \Omega & 0 & 0 & -20 \, \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 40 \, \Omega & 0 & 0 & -20 \, \Omega \\ 20 \, \Omega & 0 & 0 & 40 \, \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 20 \, \Omega & 0 & 0 & 40 \, \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 20 \, \Omega & 0 & 0 & 40 \, \Omega \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Für die Berechnung des Dreiphasenwechselstroms ist es günstig, die elektrischen Größen als Doppelvektoren mit zwei Spalten zu beschreiben. Dadurch ist die Systemmatrix nur einmal zu invertieren. Mit den Strömen und Spannungen gemäß der Gleichungen (22) und (23) gilt die folgende Gleichung:

$$\begin{bmatrix} U_{W1x} & U_{W1y} \\ U_{W2x} & U_{W2y} \\ U_{W3x} & U_{W3y} \\ U_{B1x} & U_{B1y} \\ U_{B2x} & U_{B2y} \\ U_{B3x} & U_{B3y} \\ I_{W1x} & I_{W1y} \\ I_{W2x} & I_{W2y} \\ I_{W3x} & I_{W3y} \\ I_{B1x} & I_{B1y} \\ I_{B2x} & I_{B2y} \\ I_{B3x} & I_{B3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \, \Omega & 0 & 0 & -20 \, \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 40 \, \Omega & 0 & 0 & -20 \, \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 40 \, \Omega & 0 & 0 & -20 \, \Omega \\ 20 \, \Omega & 0 & 0 & 40 \, \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 20 \, \Omega & 0 & 0 & 40 \, \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 20 \, \Omega & 0 & 0 & 40 \, \Omega \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{W1x}^{io} & I_{W1y}^{io} \\ I_{W2x}^{io} & I_{W2y}^{io} \\ I_{W3x}^{io} & I_{W3y}^{io} \\ I_{B1x}^{io} & I_{B1y}^{io} \\ I_{B2x}^{io} & I_{B2y}^{io} \\ I_{B3x}^{io} & I_{B3y}^{io} \end{bmatrix} \quad (41)$$

Es folgt die numerische Lösung:

$$\begin{bmatrix} U_{W1x} & U_{W1y} \\ U_{W2x} & U_{W2y} \\ U_{W3x} & U_{W3y} \\ U_{B1x} & U_{B1y} \\ U_{B2x} & U_{B2y} \\ U_{B3x} & U_{B3y} \\ I_{W1x} & I_{W1y} \\ I_{W2x} & I_{W2y} \\ I_{W3x} & I_{W3y} \\ I_{B1x} & I_{B1y} \\ I_{B2x} & I_{B2y} \\ I_{B3x} & I_{B3y} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{M}}} \cdot \begin{bmatrix} 8A & 0 \\ -4A & 4\sqrt{3}A \\ -4A & -4\sqrt{3}A \\ -4A & 0 \\ 2A & -2\sqrt{3}A \\ 2A & 2\sqrt{3}A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400V & 0 \\ -200V & 200\sqrt{3}V \\ -200V & -200\sqrt{3}V \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 8A & 0 \\ -4A & 4\sqrt{3}A \\ -4A & -4\sqrt{3}A \\ -4A & 0 \\ 2A & -2\sqrt{3}A \\ 2A & 2\sqrt{3}A \end{bmatrix} \quad (42)$$

Bei Vorgabe der Klemmspannungen ist die Umstellung d.h. Tauschen der Variablen und der entsprechenden Spalten erforderlich

$$\begin{bmatrix} I_{W1x}^{io} & I_{W1y}^{io} \\ I_{W2x}^{io} & I_{W2y}^{io} \\ I_{W3x}^{io} & I_{W3y}^{io} \\ I_{B1x}^{io} & I_{B1y}^{io} \\ I_{B2x}^{io} & I_{B2y}^{io} \\ I_{B3x}^{io} & I_{B3y}^{io} \\ I_{W1x} & I_{W1y} \\ I_{W2x} & I_{W2y} \\ I_{W3x} & I_{W3y} \\ I_{B1x} & I_{B1y} \\ I_{B2x} & I_{B2y} \\ I_{B3x} & I_{B3y} \end{bmatrix} = \frac{1}{100\Omega} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{W1x} & U_{W1y} \\ U_{W2x} & U_{W2y} \\ U_{W3x} & U_{W3y} \\ U_{B1x} & U_{B1y} \\ U_{B2x} & U_{B2y} \\ U_{B3x} & U_{B3y} \end{bmatrix} \quad (43)$$

Die numerische Lösung des Gleichungssystems lautet erwartungsgemäß

$$\begin{bmatrix} I_{W1x}^{io} & I_{W1y}^{io} \\ I_{W2x}^{io} & I_{W2y}^{io} \\ I_{W3x}^{io} & I_{W3y}^{io} \\ I_{B1x}^{io} & I_{B1y}^{io} \\ I_{B2x}^{io} & I_{B2y}^{io} \\ I_{B3x}^{io} & I_{B3y}^{io} \\ I_{W1x} & I_{W1y} \\ I_{W2x} & I_{W2y} \\ I_{W3x} & I_{W3y} \\ I_{B1x} & I_{B1y} \\ I_{B2x} & I_{B2y} \\ I_{B3x} & I_{B3y} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{M}}} \cdot \begin{bmatrix} 400V & 0 \\ -200V & 200\sqrt{3}V \\ -200V & -200\sqrt{3}V \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8A & 0 \\ -4A & 4\sqrt{3}A \\ -4A & -4\sqrt{3}A \\ -4A & 0 \\ 2A & -2\sqrt{3}A \\ 2A & 2\sqrt{3}A \\ 8A & 0 \\ -4A & 4\sqrt{3}A \\ -4A & -4\sqrt{3}A \\ -4A & 0 \\ 2A & -2\sqrt{3}A \\ 2A & 2\sqrt{3}A \end{bmatrix} \quad (44)$$

Die Resultate der Gleichungen (43) und (45) sind konsistent.

7 Zusammenfassung

Das vorgestellte allgemeine Modell ermöglicht die einheitliche Berechnung beliebig strukturierter Netze für Gleichstrom, Wechselstrom sowie Dreiphasenwechselstrom mit ohmschen, induktiven und kapazitiven Widerständen. Dieses Modell basiert auf den Methoden der linearen Algebra. Die Anwendung des Modells erfordert die Rechentechnik eines heutigen Ingenieurarbeitsplatzes und erweist sich bei Nutzung von Standardprogrammen wie zB. der Tabellenkalkulation als einfach, problemlos und effektiv.

8 Formelzeichen

8.1 Skalare

f	... Netzfrequenz	... s^{-1}
k	... Anzahl der Netzknoten	... —
l	... Anzahl der Leitungen	... —
m	... Anzahl Maschen	... —
n	... Anzahl der Netze bzw. Teilnetze	... —
R	... elektrischer Widerstand	... Ω
I	... elektrische Stromstärke	A
U	... elektrische Spannung	V

8.2 Vektoren

$\underline{\mathbf{I}}$	... Vektor der Stromstärke	... A
$\underline{\mathbf{U}}$	... Vektor der Spannung	... V
$\underline{\Delta \mathbf{U}}$	... Vektor der Spannungsdifferenzen	... V
$\underline{\mathbf{Z}}$	... Zustandsvektor	... A, V
$\underline{\mathbf{0}}$	... Nullvektor	... —

8.3 Matrizen

$\underline{\underline{\mathbf{A}}}$	... Admittanzmatrix	... Ω^{-1}
$\underline{\underline{\mathbf{E}}}$	... Einheitsmatrix	... —
$\underline{\underline{\mathbf{E}}}^*$	... reduzierte Einheitsmatrix	... —
$\underline{\underline{\mathbf{K}}}$	... Kopplungsmatrix	... —
$\underline{\underline{\mathbf{M}}}$	... Lösungsmatrix	... $\Omega, \Omega^{-1}, -$
$\underline{\underline{\mathbf{R}}}$	... Diagonalmatrix der Widerstände	... Ω
$\underline{\underline{\mathbf{S}}}$	... Systemmatrix	... $\Omega, -$
$\underline{\underline{\mathbf{0}}}$	... Nullmatrix	... —

8.4 Indizes

$\square_B$	... Blindgrösse
$\square_W$	... Wirkgrösse
$\square_{L1}$	... erster Aussenleiter
$\square_{L2}$	... zweiter Aussenleiter
$\square_{L3}$	... dritter Aussenleiter
$\square_N$	... Normalniveau
$\square_x$	... Raumkoordinate
$\square_y$	... Raumkoordinate
$\square^{io}$	... Input/Output
$\tilde{\square}$	... Wechselstrom

9 Literatur

- [1] Quade, W.: „Matrizenrechnung und elektrische Netze”
Archiv für Elektrotechnik XXXIV. Band; 10. Heft; 1940; S. 545-567
- [2] Dommel, H.: „Digitale Rechenverfahren für elektrische Netze I”
Archiv für Elektrotechnik XLVIII. Band; 1. Heft; 1963 ; S. 41-68
- [3] Dommel, H.: „Digitale Rechenverfahren für elektrische Netze II”
Archiv für Elektrotechnik XLVIII. Band; 119. Heft; 1963; S. 118-132
- [4] Möschwitzer, A.: „Formeln der Elektrotechnik und Elektronik”
VEB Verlag Technik Berlin 1982
- [5] Poppe, M.: „Prüfungstrainer Elektrotechnik”
Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2012; S. 105-134
- [6] Poppe, M.: „PrüfungstrainerElektrotechnik”
Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2015; S. 127-157
- [7] Crastan, V.: „Elektrische Energieversorgung 1”
Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2015; S. 435-484
- [8] Strelow, O.: „Die Allgemeine Theorie der technischen Netze”
Vorträge und Manuskripte
- [9] Strelow, O.: „Optimierung von Erdgasversorgungsnetzen”
VDI-Tagung „Optimierung in der Energieversorgung”; Stuttgart 1994
- [10] Strelow, O.: „A general calculation method for plate heat exchangers”
International Journal of Thermal Sciences (2000) 39, S.645 - 658



Technische Hochschule Mittelhessen
University of Applied Sciences

Wiesenstraße 14
D-35390 Gießen

www.thm.de