

Olaf Strelow

Allgemeines Berechnungsmodell für
Wärmeübertragerschaltungen

THM-Hochschulschriften Band 4

Olaf Strelow

Allgemeines Berechnungsmodell für
Wärmeübertragerschaltungen

THM-Hochschulschriften Band 4

THM-Hochschulschriften Band 4

© 2017 Olaf Strelow

Technische Hochschule Mittelhessen

Fachbereich Maschinenbau und Energietechnik

Herausgeber der THM-Hochschulschriften:

Der Präsident der Technischen Hochschule Mittelhessen

Alle Rechte vorbehalten, Nachdruck, auch auszugsweise, nur
mit schriftlicher Genehmigung und Quellenangabe.

Einzelne Hochschulschriften sind auch online abrufbar:

www.thm.de/bibliothek/thm-hochschulschriften

ISSN (Print) 2568-0846

ISSN (Online) 2568-3020

Inhaltsverzeichnis

1	Zusammenfassung	4
2	Problemstellung	4
3	Die Berechnung eines Wärmeübertragers	6
4	Die Berechnung einer Wärmeübertragerschaltung	7
5	Beispiele	10
5.1	Rohrbündelwärmeübertrager mit Querleitblech	10
5.2	Wärmeübertragerschaltung mit umlaufendem Wärmeträgerstrom	13
5.3	Wärmeübertragerschaltung mit Stromteilung	14
6	Ausblick	16
7	Symbolverzeichnis	17
8	Literatur	18

Allgemeines Berechnungsmodell für Wärmeübertragerschaltungen

Prof. Dr.-Ing. O. Strelow

Technische Hochschule Mittelhessen - FB Maschinenbau Energietechnik
Institut für Thermodynamik, Energieverfahrenstechnik u. Systemanalyse

St. Tönis, 14.5.1996

1 Zusammenfassung

Es wird eine allgemeine Methode zur Berechnung beliebiger Wärmeübertragerschaltungen vorgestellt. Wärmeübertragerschaltungen sind gekoppelte Wärmeübertrager, welche von mehreren Prozeßströmen in bestimmten Reihenfolgen nacheinander durchflutet werden. Für die Berechnung ist es günstig, auch einzelne Wärmeübertrager mit kompliziertem Strömungsbild als Schaltung mehrerer, ideal durchströmter Apparate aufzufassen. Die Vorteile dieser Dekomposition bestehen in der höheren Genauigkeit und im geringeren Rechenaufwand für Modelle idealer Apparate. Diesen Vorteilen steht meist der gravierende Nachteil einer iterativen Berechnung der Temperaturen zwischen den idealen Apparaten gegenüber.

Die vorgestellte Methode gestattet erstmals eine iterationslose Berechnung von Wärmeübertragerschaltungen. Das Prinzip dieser Methode basiert auf gekoppelten Matrizen-gleichungen. Die Modelle sind für beliebige Aufgabenstellungen einfach parametrierbar. Damit ist diese Methode besonders für Variantenrechnungen geeignet.

Die Anwendung dieser Methode erfordert keine spezielle Software. Die Lösung der Modellgleichungen wird mit mathematischer Standardsoftware, wie *Mathcad* oder *Maple*, sehr einfach und übersichtlich erhalten.

2 Problemstellung

Wärmeübertrager insbesondere Wärmeübertragersschaltungen sind in vielen verfahrenstechnischen und energiewirtschaftlichen Anlagen involviert. Die Kosten für Wärmeübertragungsapparate sind in der Regel bestimmender Anteil der Investitionen für derartige Anlagen. Damit besitzt die Auslegung von Wärmeübertragern eine technisch-ökonomische Brisanz. Weiterhin bestimmen Dimensionierung und Konstruktion der Wärmeübertrager maßgeblich das Betriebsverhalten von Anlagen. Dies gilt besonders für Situationen, welche vom Auslegungsfall abweichen. Um die optimalen Gestaltungsparameter eines Wär-

meübertragers oder einer Wärmeübertragerschaltung zu ermitteln, ist während der Entwurfsphase die Analyse sämtlicher Betriebsfälle notwendig.

Für den Projektanten ergeben sich hieraus zwei unterschiedliche Aufgabenstellungen - Dimensionierung der Apparate und Berechnung von Varianten. Während für die Dimensionierung eines Wärmeübertragers das Temperaturprofil des Auslegungsfalls sowie die Wärmedurchgangskoeffizienten vorgegeben sind, um daraus den Bedarf an Wärmeübertragungsfläche zu ermitteln, ist es bei den Variantenrechnungen genau umgekehrt. Hierbei ist ein Wärmeübertrager bestimmter Bauart und Wärmeübertragungsfläche vorgegeben und es sind die Temperaturprofile zu ermitteln, welche sich in Abhängigkeit von Durchsätzen und Eintrittstemperaturen ergeben.

Bei der Berechnung von Wärmeübertragern tritt häufig die Schwierigkeit auf, daß die vorgesehene Apparatekonstruktion aufgrund ihrer besonderen Strömungsform mit "klassischen" Ansätzen für Gleich-, Kreuz- und Gegenstrom sehr unscharf beschrieben wird. Um ein genaueres Modell zu erhalten, ist die Zellenmethode heranzuziehen [1],[2],[3]. Das Prinzip dieser Methode besteht darin, den stömungstechnisch komplexen Apparat gedanklich in eine Wärmeübertragerschaltung zu überführen, welche aus mehreren ideal durchströmten Wärmeübertragern besteht. Der erforderliche Rechenaufwand steigt hierbei um ein Vielfaches.

Die Berechnung von Wärmeübertragerschaltungen, auch von einzelnen Wärmeübertragern ist i.a. ein iterativer Prozeß. Hierfür gibt es zwei Ursachen:

- Die Stoffdaten der Medien sind Funktionen der Temperatur und liegen zu Beginn der Rechnung nur als Schätzwerte vor. Erst während der Berechnungen sind die Stoffdaten präzisierbar. Dies trifft im besonderen für Wärmeübertrager zu, in denen ein Phasenwechsel stattfindet. Die notwendigen Stoffdaten-Iterationen sind nur durch generelle Verwendung von Schätzwerten vermeidbar.
- Bei Wärmeübertragerschaltungen sind zu Beginn der Berechnung die Austrittstemperaturen sämtlicher Apparate unbekannt, somit auch Eintrittstemperaturen jener Apparate, deren Eingänge mit Ausgängen anderer Apparate verbunden sind. Deshalb ist meist keine sequentielle Berechnung von Schaltungen möglich. Nur in Ausnahmefällen existiert eine Reihenfolge, welche für die Berechnung eines nächsten Apparates immer bereits bekannte Eintrittstemperaturen gewährleistet. Zur Berechnung allgemeiner Schaltungen werden daher iterativ-sequentielle Algorithmen vorgeschlagen [1],[2],[3]. Diese Struktur-Iterationen sind jedoch, wie nachfolgend dargestellt wird, durch eine simultane Berechnung vermeidbar [4].

3 Die Berechnung eines Wärmeübertragers

Die Berechnung eines Wärmeübertragers umfaßt, ausgehend von Massendurchsätzen, Wärmeübertragungsfläche, Wärmedurchgangskoeffizienten sowie Eintritts-temperaturen, die Ermittlung der Austrittstemperaturen. Es ist günstig die stationären Eigenschaften eines Wärmeübertragers mit Betriebscharakteristiken zu beschreiben [5]. Dieses sind bauartspezifische Apparatekonstanten, welche nichtlinear vom Wärmedurchgangskoeffizienten, der Wärmeübertragungsfläche und den Wärmekapazitätsströmen abhängen (Abbildung 1).

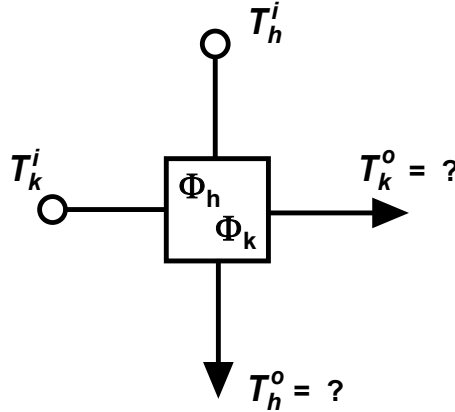


Abbildung 1: Berechnungsschema eines Wärmeübertragers

Die Abkühlung des wärmeabgebenden (heißen) Mediums wird mit der Betriebscharakteristik Φ_h und das Aufheizen des wärmeaufnehmenden (kalten) Mediums analog mit der Betriebscharakteristik Φ_k beschrieben.

$$\Phi_h = f_B(k, A, \dot{C}_h, \dot{C}_k) \quad \text{bzw.} \quad \Phi_k = f_B(k, A, \dot{C}_k, \dot{C}_h) \quad (1)$$

Beide Betriebscharakteristiken hängen linear voneinander ab

$$\dot{C}_h \Phi_h = \dot{C}_k \Phi_k \quad (2)$$

wobei gilt

$$\dot{C}_h = \dot{m}_h c_h \quad \text{sowie} \quad \dot{C}_k = \dot{m}_k c_k \quad (3)$$

Für ideale Strömungsformen wie z.B. Gleichstrom, Gegenstrom existieren exakte Beziehungen für die Betriebscharakteristik.

- Es gilt für Gleichstrom

$$\Phi_h = \frac{1 - \exp\left(-\frac{kA}{\dot{C}_h} \left(1 + \frac{\dot{C}_h}{\dot{C}_k}\right)\right)}{1 + \frac{\dot{C}_h}{\dot{C}_k}}, \quad (4)$$

- für Gegenstrom

$$\Phi_h = \frac{1 - \exp\left(-\frac{kA}{\dot{C}_h} \left(1 - \frac{\dot{C}_h}{\dot{C}_k}\right)\right)}{1 - \frac{\dot{C}_h}{\dot{C}_k} \exp\left(-\frac{kA}{\dot{C}_h} \left(1 - \frac{\dot{C}_h}{\dot{C}_k}\right)\right)}. \quad (5)$$

(diese Gleichungen gelten analog für Φ_k , indem die Indizes h und k vertauscht werden)

Mit den Betriebscharakteristiken ist es möglich, den Zusammenhang zwischen Eintritts- und Austrittstemperaturen für Wärmeübertrager mit einem linearen Ansatz zu beschreiben.

$$\begin{bmatrix} T_h^o \\ T_k^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \Phi_h & \Phi_h \\ \Phi_k & 1 - \Phi_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_h^i \\ T_k^i \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\underline{\mathbf{T}}^o = \underline{\underline{\Phi}}^A \cdot \underline{\mathbf{T}}^i$$

Die Matrix $\underline{\underline{\Phi}}^A$ ist aufgrund ihrer Eigenschaften als verallgemeinerte Apparatecharakteristik aufzufassen. Sie charakterisiert im Temperaturraum eine Translation längs der Prozeßgeraden vom Temperaturvektor $\underline{\mathbf{T}}^i$ zum Temperaturvektor $\underline{\mathbf{T}}^o$.

4 Die Berechnung einer Wärmeübertragerschaltung

In Analogie zum Wärmeübertrager umfaßt die Berechnung einer Wärmeübertragerschaltung die Ermittlung der Stromaustrittstemperaturen und Zwischentemperaturen. Ausgangsgrößen sind dabei die Massendurchsätze, die Wärmeübertragungsflächen und die Wärmedurchgangskoeffizienten der einzelnen Apparate sowie die Stromeintrittstemperaturen.

Für die mathematische Beschreibung der technischen Funktion einer Wärmeübertragerschaltung wird das **Funktionsmodell** definiert. Es entsteht durch formale Extrapolation des Matrixmodells Gl.(6) und bildet den Zusammenhang zwischen Eintrittstemperaturen und Austrittstemperaturen linear ab.

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{T}}_h^o \\ \underline{\mathbf{T}}_k^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{E}}} - \underline{\underline{\Phi}}_h & \underline{\underline{\Phi}}_h \\ \underline{\underline{\Phi}}_k & \underline{\underline{\mathbf{E}}} - \underline{\underline{\Phi}}_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{T}}_h^i \\ \underline{\mathbf{T}}_k^i \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\underline{\mathbf{T}}^o = \underline{\underline{\Phi}} \cdot \underline{\mathbf{T}}^i$$

Die Funktionsmatrix $\underline{\underline{\Phi}}$ besteht aus vier Untermatrizen. Diese weisen für eine Schaltung mit m Wärmeübertragern das Format $m \times m$ auf. Die Untermatrizen $\underline{\underline{\Phi}}_h$ bzw. $\underline{\underline{\Phi}}_k$ sind Diagonalmatrizen. An den Positionen (i, i) befinden sich die Betriebscharakteristiken Φ_h bzw. Φ_k des i -ten Apparates. Die Vektoren $\underline{\mathbf{T}}_h^i$ und $\underline{\mathbf{T}}_h^o$ enthalten an i -ter Position die Ein- bzw. Austrittstemperatur des heißen Stromes von Apparat i . Analog enthalten die Vektoren $\underline{\mathbf{T}}_k^i$ und $\underline{\mathbf{T}}_k^o$ an i -ter Position die Eintritts- bzw. die Austrittstemperatur des kalten Stromes vom i -ten Apparates.

Obwohl das Funktionsmodell die Austrittstemperaturen $\underline{\mathbf{T}}^o$ der Wärmeübertrager als Funktion der Eintrittstemperaturen $\underline{\mathbf{T}}^i$ exakt beschreibt, liefert es noch keine Lösung, da aufgrund der Apparateverschaltung auch im Vektor $\underline{\mathbf{T}}^i$ unbekannte Temperaturen vorkommen. Somit liegen zwei unbekannte Vektoren vor und es ist notwendig eine zweite strukturbeschreibende Gleichung zu formulieren. Es wird das **Inputmodell** definiert.

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{T}}_h^i \\ \underline{\mathbf{T}}_k^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{S}}_{hh} & \underline{\mathbf{S}}_{hk} \\ \underline{\mathbf{S}}_{kh} & \underline{\mathbf{S}}_{kk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{T}}_h^o \\ \underline{\mathbf{T}}_k^o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{I}}_h & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{I}}_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{T}}_h^I \\ \underline{\mathbf{T}}_k^I \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\underline{\mathbf{T}}^i = \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{T}}^o + \underline{\mathbf{I}} \cdot \underline{\mathbf{T}}^I$$

Die Strukturmatrix $\underline{\mathbf{S}}$ beschreibt die Kopplungen zwischen den Wärmeübertragern. Sie besteht aus vier quadratischen Untermatrizen des Formates $m \times m$. Die Matrixelemente nehmen Werte zwischen 0 und 1 an. Von Null verschiedene Elemente bedeuten:

- $\underline{\mathbf{S}}_{hh}(i, j) = x$ Der Anteil x des heißen Stroms aus Apparat j fließt als heißer Strom in den Apparat i .
- $\underline{\mathbf{S}}_{kh}(i, j) = x$ Der Anteil x des kalten Stroms aus Apparat j fließt als heißer Strom in den Apparat i .
- $\underline{\mathbf{S}}_{hk}(i, j) = x$ Der Anteil x des heißen Stroms aus Apparat j fließt als kalter Strom in den Apparat i .
- $\underline{\mathbf{S}}_{kk}(i, j) = x$ Der Anteil x des kalten Stroms aus Apparat j fließt als kalter Strom in den Apparat i .

Die Inputmatrix $\underline{\mathbf{I}}$ lokalisiert die Eingänge der Wärmeübertrager, an welchen die Prozeßströme in die Schaltung eintreten. Sie besteht aus zwei Nullmatrizen sowie den Untermatrizen $\underline{\mathbf{I}}_h$ und $\underline{\mathbf{I}}_k$. Die Untermatrizen sind nicht quadratisch. Ihr Format für h heiße und k kalte Ströme ist $m \times h$ bzw. $m \times k$. Die Matrixelemente nehmen die Werte Null oder Eins an. Es bedeuten:

- $\underline{\mathbf{I}}_h(i, j) = 1$ Der heiße Strom j tritt am Apparat i in die Wärmeübertragerschaltung ein
- $\underline{\mathbf{I}}_k(i, j) = 1$ Der kalte Strom j tritt am Apparat i in die Wärmeübertragerschaltung ein

Mit Gleichung (8) ist ein weiterer mathematischer Zusammenhang zwischen den Vektoren $\underline{\mathbf{T}}^i$ und $\underline{\mathbf{T}}^o$ gegeben. Die Gleichungen (7) und (8) bilden ein Matrizengleichungssystem mit zwei unbekannten Vektoren, welches in allgemeiner Form lösbar ist. Durch Einsetzen von Gleichung (8) in Gleichung (7) und Auflösung nach dem Vektor der Austrittstemperaturen der Apparate $\underline{\mathbf{T}}^o$ ergibt sich:

$$\underline{\mathbf{T}}^o = (\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{\Phi}} \cdot \underline{\mathbf{S}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{\Phi}} \cdot \underline{\mathbf{I}} \cdot \underline{\mathbf{T}}^I. \quad (9)$$

Um aus dem Vektor der Apparateausttrittstemperaturen $\underline{\mathbf{T}}^o$ die Temperaturen "herauszufiltern" mit denen die Ströme die Wärmeübertragerschaltung verlassen, ist ein weiteres strukturbeschreibendes Modell, das **Outputmodell** erforderlich.

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{T}}_h^O \\ \underline{\mathbf{T}}_k^O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{O}}_h & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{O}}_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{T}}_h^o \\ \underline{\mathbf{T}}_k^o \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\underline{\mathbf{T}}^O = \underline{\mathbf{O}} \cdot \underline{\mathbf{T}}^o$$

Die Outputmatrix $\underline{\mathbf{O}}$ besteht, neben zwei Nullmatrizen, aus den Untermatrizen $\underline{\mathbf{O}}_h$ und $\underline{\mathbf{O}}_k$. Sie besitzen das Format $h \times m$ bzw. $k \times m$. Ihre Elemente weisen Werte zwischen Null und Eins auf. Von Null verschiedene Elemente bedeuten:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{O}}_h(i, j) = x & \quad \text{Der Anteil } x \text{ des heißen Stroms } i \text{ verläßt die} \\ & \quad \text{Wärmeübertragerschaltung am Apparat } j \\ \underline{\mathbf{O}}_k(i, j) = x & \quad \text{Der Anteil } x \text{ des kalten Stroms } i \text{ verläßt die} \\ & \quad \text{Wärmeübertragerschaltung am Apparat } j \end{aligned}$$

Durch formales Einsetzen von Gleichung (9) in Gleichung (10) erhält man eine Beziehung, welche die Austrittstemperaturen der Prozeßströme aus der Schaltung in Abhängigkeit der Eintrittstemperaturen darstellt.

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{T}}^O &= \underline{\mathbf{O}} \cdot (\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{\Phi}} \cdot \underline{\mathbf{S}})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{\Phi}} \cdot \underline{\mathbf{I}} \cdot \underline{\mathbf{T}}^I \\ \underline{\mathbf{T}}^O &= \underline{\mathbf{\Phi}}^S \cdot \underline{\mathbf{T}}^I \end{aligned} \quad (11)$$

Die Matrix $\underline{\mathbf{\Phi}}^S$ besitzt das Format $(h + k) \times (h + k)$. Sie beschreibt im Vektorraum der Temperaturen die Resultierende eines Polygonzuges. Dieser Polygonzug setzt sich aus den Prozeßgeraden der Apparatecharakteristiken zusammen. Die Matrix $\underline{\mathbf{\Phi}}^S$ wird deshalb in Analogie zur Apparatecharakteristik $\underline{\mathbf{\Phi}}^A$ als Schaltungscharakteristik bezeichnet.

5 Beispiele

Die Möglichkeiten der vorgestellten allgemeinen Berechnungsmethode für Wärmeübertragerschaltungen werden an drei Beispielen demonstriert.

5.1 Rohrbündelwärmeübertrager mit Querleitblech

Die Abbildung 2 zeigt einen mehrgängigen Rohrbündelwärmeübertrager mit einem mantelseitigen Umlenkblech. Dieses Berechnungsbeispiel ist [2] entnommen.

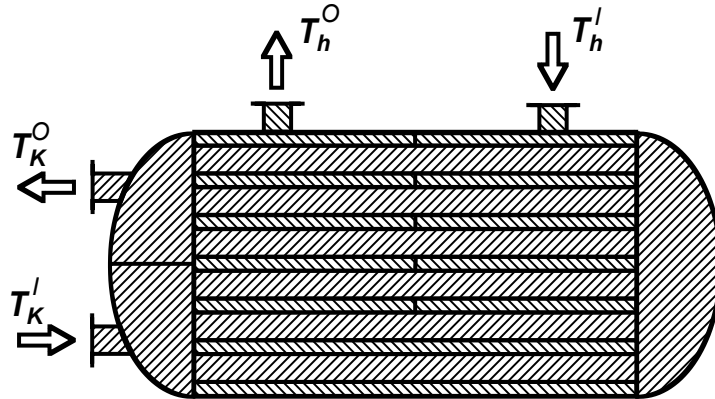


Abbildung 2: Rohrbündelwärmeübertrager mit Umlenkblech

Während der Wärmetübergang der einzelnen Bereiche in Abhängigkeit von ihren hydraulischen und thermodynamischen Verhältnissen technisch genau beschreibbar ist, weicht die treibende Temperaturdifferenz aufgrund der nichtidealen Strömungsform vom logarithmischen Mittelwert ab.

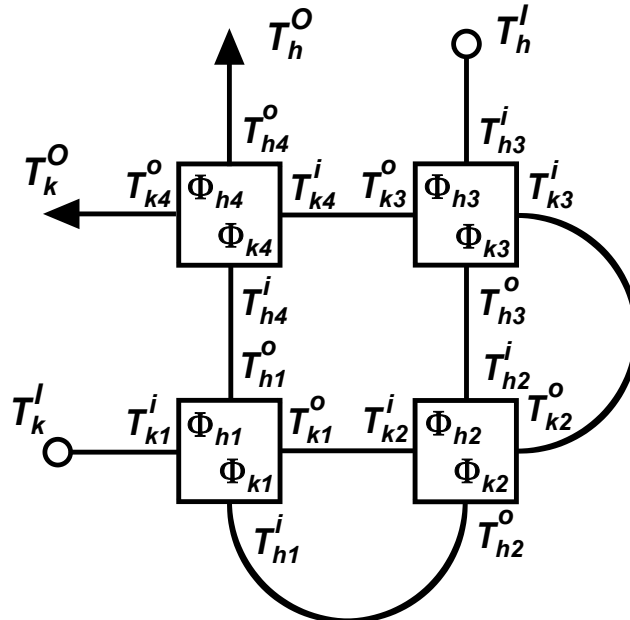


Abbildung 3: Ersatzschaltung des Rohrbündelwärmeübertragers

Um eine hinreichend genaue Berechnung der Temperaturdifferenz zu ermöglichen, wird dieser Apparat in eine Schaltung (Abbildung 3) mit vier idealen Kreuzstromapparaten überführt.

- Funktionsmatrix $\underline{\underline{\Phi}}$

Die Teilmatrizen des Funktionsmodells enthalten auf ihren Hauptdiagonalen die Betriebscharakteristiken der vier Kreuzstromapparate.

$$\underline{\underline{\Phi}}_h = \begin{bmatrix} \Phi_{h1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{h2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{h3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_{h4} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\Phi}}_k = \begin{bmatrix} \Phi_{k1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{k2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{k3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_{k4} \end{bmatrix} \quad (12)$$

- Strukturmatrix $\underline{\underline{S}}$

Die Verschaltungen zwischen den Apparaten werden durch die Untermatrizen $\underline{\underline{S}}_{hh}$ und $\underline{\underline{S}}_{kk}$ ausgedrückt. Die Untermatrizen $\underline{\underline{S}}_{hk}$ und $\underline{\underline{S}}_{kh}$ sind bei dieser Schaltung Nullmatrizen.

$$\underline{\underline{S}}''_{hh} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{S}}''_{kk} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

- Inputmatrix $\underline{\underline{I}}$

Die Untermatrizen der Eingangsmatrix $\underline{\underline{I}}$ beschreiben die Anbindungen der Prozeßströme an die Wärmeübertragerschaltung. Sie lauten:

$$\underline{\underline{I}}_h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{I}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

- Ausgangsmatrix $\underline{\underline{O}}$

Die Untermatrizen der Ausgangsmatrix $\underline{\underline{O}}$ lokalisieren die Ausgänge der Prozeßströme aus der Wärmeübertragerschaltung.

$$\underline{\underline{O}}_h = [0 \ 0 \ 0 \ \mathbf{1}] \quad \underline{\underline{O}}_k = [0 \ 0 \ 0 \ \mathbf{1}] \quad (15)$$

Für die Austrittstemperaturen der Apparate $\underline{\underline{T}}^o$ sowie die Austrittstemperaturen der Wärmeübertragerschaltung $\underline{\underline{T}}^O$ gelten die Gleichungen (9)

$$\underline{\underline{T}}^o = (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{\Phi S}})^{-1} \underline{\underline{\Phi I}} \cdot \underline{\underline{T}}^I = \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{T}}^I \quad (16)$$

und (11)

$$\underline{\underline{T}}^O = \underline{\underline{O}} (\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{\Phi S}})^{-1} \underline{\underline{\Phi I}} \cdot \underline{\underline{T}}^I = \underline{\underline{\Phi}}^S \cdot \underline{\underline{T}}^I \quad (17)$$

Durch Einsetzen der Matrizen (12-15) in die obige Gleichung ergeben sich für die Matrizen $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ und $\underline{\underline{\Phi}}^S$ die allgemeinen Lösungen

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} a(1-\Phi_h)^3 & 1-a(1-\Phi_h)^3 \\ a(1-\Phi_h)^2 & 1-a(1-\Phi_h)^2 \\ 1-a(1-\Phi_k)^2\Phi_h & a(1-\Phi_k)^2\Phi_h \\ \Phi_k + a(1-\Phi_h)^3(1-\Phi_h-\Phi_k) & 1-\Phi_k - a(1-\Phi_h)^3(1-\Phi_h-\Phi_k) \\ a\Phi_k(1-\Phi_h)^2 & 1-a\Phi_k(1-\Phi_h)^2 \\ 1-a(1-\Phi_k)^2 & a(1-\Phi_k)^2 \\ 1-a(1-\Phi_k)^3 & a(1-\Phi_k)^3 \\ 1-\Phi_h - a(1-\Phi_k)(1-\Phi_k-\Phi_h) & \Phi_h + a(1-\Phi_k)(1-\Phi_k-\Phi_h) \end{bmatrix} \quad (18)$$

sowie

$$\underline{\underline{\Phi}}^S = \begin{bmatrix} \Phi_k + a(1-\Phi_h)^3(1-\Phi_h-\Phi_k) & 1-\Phi_k - a(1-\Phi_h)^3(1-\Phi_h-\Phi_k) \\ 1-\Phi_h - a(1-\Phi_k)(1-\Phi_k-\Phi_h) & \Phi_h + a(1-\Phi_k)(1-\Phi_k-\Phi_h) \end{bmatrix} \quad (19)$$

mit

$$a = \frac{1}{1 + \Phi_k^2\Phi_h - 3\Phi_k\Phi_h + \Phi_k\Phi_h^2} \quad (20)$$

Unter Verwendung der dimensionslosen Eintrittstemperaturen $T_h^I = 1$ und $T_k^I = 0$ sowie folgender Werte für die Betriebscharakteristiken

$$\begin{aligned} \Phi_{h1} &= \Phi_{h2} = \Phi_{h3} = \Phi_{h4} = \Phi_h = 0.25 \\ \Phi_{k1} &= \Phi_{k2} = \Phi_{k3} = \Phi_{k4} = \Phi_k = 0.25 \end{aligned} \quad (21)$$

ergeben sich die numerischen Resultate

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}^o = \begin{bmatrix} .5 & .5 \\ .66667 & .33333 \\ .83333 & .16667 \\ .5 & .5 \\ .16667 & .83333 \\ .33333 & .66667 \\ .5 & .5 \\ .5 & .5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .5 \\ .66667 \\ .83333 \\ .5 \\ .16667 \\ .33333 \\ .5 \\ .5 \end{bmatrix} \quad (22)$$

und

$$\underline{\underline{\Phi}}^S = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Die resultierenden Betriebscharakteristiken Φ_h und Φ_k des Rohrbündelwärmeübertragers betragen mit [2] übereinstimmend jeweils 0.5.

5.2 Wärmeübertragerschaltung mit umlaufendem Wärmeträgerstrom

Abbildung 4 zeigt eine Wärmeübertragerschaltung mit zwei Apparaten, welche über einen Wärmeträgerstrom miteinander gekoppelt sind.

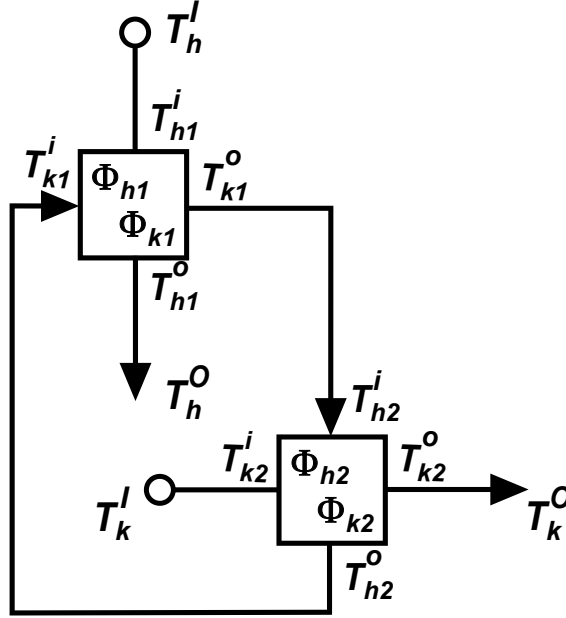


Abbildung 4: Wärmeübertragerschaltung mit Wärmeträgerstrom

Die Untermatrizen für dieses Beispiel lauten:

- Funktionsmatrix $\underline{\underline{\Phi}}$

$$\underline{\underline{\Phi}}_h = \begin{bmatrix} \Phi_{h1} & 0 \\ 0 & \Phi_{h2} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\Phi}}_k = \begin{bmatrix} \Phi_{k1} & 0 \\ 0 & \Phi_{k2} \end{bmatrix} \quad (24)$$

- Strukturmatrix $\underline{\underline{S}}$

Die Strukturuntermatrizen $\underline{\underline{S}}_{hh}$ und $\underline{\underline{S}}_{kk}$ sind Nullmatrizen. Für die Matrizen $\underline{\underline{S}}_{kh}$ und $\underline{\underline{S}}_{hk}$ gilt

$$\underline{\underline{S}}_{kh} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{S}}_{hk} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

- Eingangsmatrix $\underline{\underline{I}}$

$$\underline{\underline{I}}_h = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{I}}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

- Ausgangsmatrix $\underline{\underline{O}}$

$$\underline{\underline{O}}_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{O}}_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Mit den Gleichungen (9) und (11) ergibt sich die allgemeine Lösung für die Appara-
teaustrittstemperaturen

$$\begin{bmatrix} T_{h1}^o \\ T_{h2}^o \\ T_{k1}^o \\ T_{k2}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - a\Phi_{h1}\Phi_{h2} & a\Phi_{h1}\Phi_{h2} \\ a(1 - \Phi_{h2})\Phi_{k1} & a\Phi_{h2} \\ a\Phi_{k1} & a(1 - \Phi_{k1})\Phi_{h2} \\ a\Phi_{k1}\Phi_{k2} & 1 - a\Phi_{k1}\Phi_{k2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_h^I \\ T_k^I \end{bmatrix} \quad (28)$$

sowie für die Austrittstemperaturen der Schaltung

$$\begin{bmatrix} T_h^O \\ T_k^O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - a\Phi_{h1}\Phi_{h2} & a\Phi_{h1}\Phi_{h2} \\ a\Phi_{k1}\Phi_{k2} & 1 - a\Phi_{k1}\Phi_{k2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_h^I \\ T_k^I \end{bmatrix} \quad (29)$$

mit

$$a = \frac{1}{\Phi_{k1} + \Phi_{h2} - \Phi_{k1}\Phi_{h2}} \quad (30)$$

Diese allgemeine Lösung stimmt mit [3] überein.

5.3 Wärmeübertragerschaltung mit Stromteilung

In Abbildung 5 ist eine Wärmeübertragerschaltung mit einer Stromteilung dargestellt.

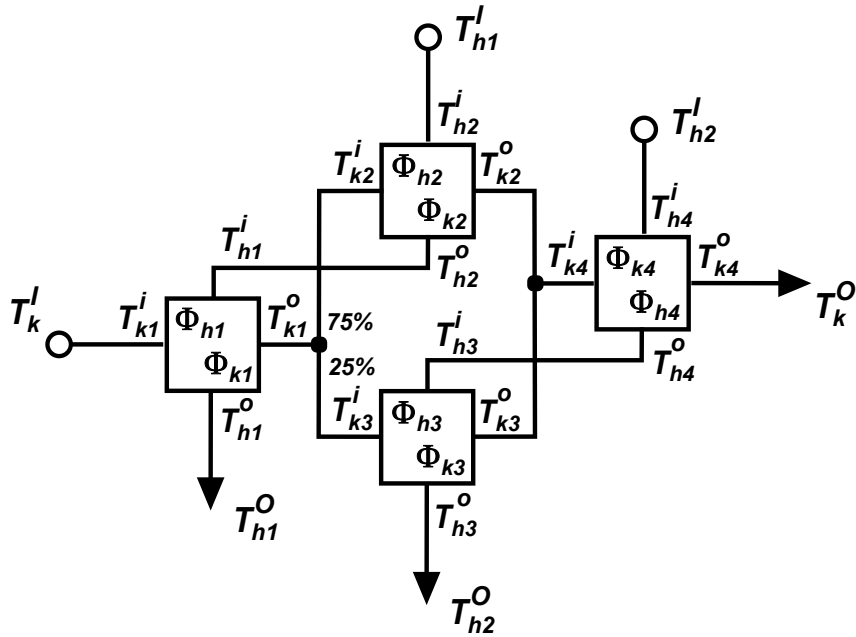


Abbildung 5: Wärmeübertragerschaltung mit Stromteilung

Die innere Strukturmatrix enthält hierbei neben den Werten 0 und 1 den Verteilungskoeffizienten des T-Stückes $x = 0.75$. Die Modellmatrizen lauten:

- Funktionsmatrix $\underline{\underline{\Phi}}$

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\Phi}}_h &= \begin{bmatrix} \Phi_{h1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{h2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{h3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_{h4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.80 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.76 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.64 \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{\Phi}}_k &= \begin{bmatrix} \Phi_{k1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{k2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{k3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_{k4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.60 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.76 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.16 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (31)$$

- Strukturmatrix $\underline{\underline{S}}$

Die Strukturuntermatrizen $\underline{\underline{S}}_{hk}$ und $\underline{\underline{S}}_{kh}$ sind Nullmatrizen

$$\underline{\underline{S}}_{hh} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{S}}_{kk} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{x} & \mathbf{1-x} & 0 \end{bmatrix}\quad (32)$$

- Inputmatrix $\underline{\underline{I}}$

$$\underline{\underline{I}}_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{I}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\quad (33)$$

- Ausgangsmatrix $\underline{\underline{O}}$

$$\underline{\underline{O}}_h = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{O}}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Aufgrund des Umfanges wird nur die numerische Lösung für dieses Beispiel angegeben. Mit den Eintrittstemperaturen der Ströme

$$\begin{bmatrix} T_{h1}^I \\ T_{h2}^I \\ T_k^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 373 \\ 405 \\ 293 \end{bmatrix} K\quad (34)$$

ergeben sich folgende Apparateaustrittstemperaturen:

$$\begin{bmatrix} T_{h1}^o \\ T_{h2}^o \\ T_{h3}^o \\ T_{h4}^o \\ T_{k1}^o \\ T_{k2}^o \\ T_{k3}^o \\ T_{k4}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .125 & 0 & .875 \\ .625 & 0 & .375 \\ .38730 & .09836 & .51434 \\ .42623 & .40984 & .16393 \\ .375 & 0 & .625 \\ .75 & 0 & .25 \\ .41393 & .31148 & .27459 \\ .55943 & .22541 & .21516 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 373 \\ 405 \\ 293 \end{bmatrix} K = \begin{bmatrix} 303.0 \\ 343.0 \\ 335.0 \\ 373.0 \\ 323.0 \\ 353.0 \\ 361.0 \\ 363.0 \end{bmatrix} K\quad (35)$$

Die Schaltungscharakteristik $\underline{\underline{\Phi}}^S$ lautet:

$$\underline{\underline{\Phi}}^S = \begin{bmatrix} .125 & 0 & .875 \\ .38730 & .09836 & .51434 \\ .55943 & .22541 & .21516 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Diese Lösungsmatrizen besitzen immer positive Elemente. Ihre Zeilensummen betragen stets 1. Somit ist der relative Einfluß der Eingangstemperaturen auf die Austrittstemperaturen direkt ablesbar, z.B. bewirkt eine Änderung der Eintrittstemperatur des kalten Stromes eine auf 56% abgeschwächte Änderung der kalten Austrittstemperatur.

6 Ausblick

Mit der vorgestellten Methode ist es möglich Wärmeübertragerschaltungen beliebiger Struktur und Dimension iterationslos zu berechnen. Mögliche Anwendungen sind z.B. komplexe Wärmeübertragerschaltungen in Destillationsanlagen und Erdölraffinerien. Bei der Berechnung einzelner Wärmeübertrager ermöglicht die vorgestellte Methode die uneingeschränkte Anwendbarkeit der Zellenmethode.

Der derzeitige Entwicklungsstand der Simulation und Berechnung von Wärmeübertragungsprozessen ist davon geprägt, daß zahlreiche Phänomene des Wärmeüberganges theoretisch und experimentell untersucht wurden und mit technischer Genauigkeit mathematisch beschreibbar sind. Jedoch treten diese Phänomene nie isoliert auf. In einem mehrgängigen Rohrbündelapparat z.B. gibt es längs, quer sowie schräg angeströmte Rohre. Weiterhin existieren Bereiche in denen das Gleichstrom-, das Gegenstrom- oder das Kreuzstromprinzip überwiegt. Einzeln sind alle Kombinationen dieser Phänomene berechenbar. In der praktischen Auslegung behilft man sich meist pauschal mit einem korrigierten logarithmischen Temperaturmittel und einem durchschnittlichen Wärmedurchgangskoeffizienten.

Die vorgestellte Methode ist als Beitrag zu sehen, eine neue Generation von Wärmeübertragermodellen zu schaffen, welche das gleichzeitige, räumlich getrennte Wirken verschiedener Wärmeübergangsphänomene beschreiben. Hieraus ergeben sich für die kommenden Jahre theoretische sowie experimentelle Aufgaben.

7 Symbolverzeichnis

Formelzeichen

a	...	Konstante	...	[1]
A	...	Wärmeübertragungsfläche	...	[m^2]
c_p	...	spezifische Wärmekapazität	...	[$J \, kg^{-1} K^{-1}$]
f_B	...	bauartspezifische Funktion	...	[1]
$\dot{C}$	...	Wärmekapazitätsstrom	...	[$W \, K^{-1}$]
$\underline{\underline{\mathbf{I}}}$	...	Inputmatrix	...	[1]
k	..	Wärmedurchgangskoeffizient	...	[$W \, m^{-2} K^{-1}$]
$\dot{m}$	...	Massenstrom	...	[$kg \, s^{-1}$]
$\underline{\underline{\mathbf{O}}}$	...	Outputmatrix	...	[1]
$\underline{\underline{\mathbf{S}}}$	...	Strukturmatrix	...	[1]
T	...	Temperatur	...	[K]
$\underline{\underline{\mathbf{T}}}$	...	Temperaturvektor	...	[K]
x	...	Verteilungskoeffizient	...	[1]
Φ	...	Betriebscharakteristik	...	[1]
$\underline{\underline{\Phi}}$	...	Funktionsmatrix	...	[1]

tiefgestellte Indizes

i	...	Zählindex
j		Zählindex
k	...	kalt
h	...	heiß

hochgestellte Indizes

A	...	Apparat
i	...	input (Apparat)
I	...	input (Schaltung)
o	...	output (Apparat)
O	...	output (Schaltung)
S	...	Schaltung

8 Literatur

- [1] Gaddis, E. S. und A. Vogelpohl: Über den Wirkungsgrad und die mittlere Temperaturdifferenz von Rohrbündelwärmeübertragern mit Umlenksegmenten und zwei rohrseitigen Gängen. Chem. Eng. Process. 18 (1984) S. 269-273
- [2] Roetzel, W.: Berechnung von Wärmeübertragern
VDI-Wärmeatlas, 7. Auflage, VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf 1994, Abschnitt Ca 12
- [3] Martin, H.: Wärmeübertrager, 1. Aufl., S. 47-61, S. 84-89,
Georg Thieme Verlag Stuttgart-New York 1988
- [4] Strelow, O.: Analyse und Synthese von Wärmeübertragersystemen
Köthen, Dissertation 1984, S. 47-56
- [5] Bošnjaković, F.; Viličić, M. und Slipčević, B.: Einheitliche
Berechnung von Rekuperatoren,
VDI-Forschungsheft 432, Ausg. B, Band 17, 1951



Technische Hochschule Mittelhessen
University of Applied Sciences

Wiesenstraße 14
D-35390 Gießen

www.thm.de