

Olaf Strelow

Allgemeines Berechnungsmodell für
Plattenwärmeübertrager

THM-Hochschulschriften Band 5

Olaf Strelow

Allgemeines Berechnungsmodell für
Plattenwärmeübertrager

THM-Hochschulschriften Band 5

THM-Hochschulschriften Band 5

© 2017 Olaf Strelow

Technische Hochschule Mittelhessen

Fachbereich Maschinenbau und Energietechnik

Herausgeber der THM-Hochschulschriften:

Der Präsident der Technischen Hochschule Mittelhessen

Alle Rechte vorbehalten, Nachdruck, auch auszugsweise, nur
mit schriftlicher Genehmigung und Quellenangabe.

Einzelne Hochschulschriften sind auch online abrufbar:

www.thm.de/bibliothek/thm-hochschulschriften

ISSN (Print) 2568-0846

ISSN (Online) 2568-3020

Inhaltsverzeichnis

1	Ausgangssituation und Aufgabenstellung	4
2	Darstellung des allgemeinen Modells für Plattenwärmeübertrager	5
2.1	Gleichstromwärmeübertrager	5
2.2	Gegenstromwärmeübertrager	6
2.3	Gegenstromplattenwärmeübertrager	8
2.4	Plattenwärmeübertrager mit Serien-Parallel-Schaltung	13
2.5	Plattenwärmeübertrager für drei Prozeßströme	15
2.6	Spiralplattenwärmeübertrager	17
3	Zusammenfassende Darstellung des Plattenwärmeübertragermodells	19
3.1	Berechnungsalgorithmus	19
3.2	Beispiele	20
3.2.1	Gleichstromwärmeübertrager	20
3.2.2	Gegenstromwärmeübertrager	20
3.2.3	Gegenstromplattenwärmeübertrager	21
3.2.4	Plattenwärmeübertrager mit Serien-Parallel-Schaltung	22
3.2.5	Plattenwärmeübertrager mit drei Prozeßströmen	24
3.2.6	Spiralplattenwärmeübertrager	25
4	Erweiterungsmöglichkeiten des Modells	27
4.1	Berücksichtigung der Wärmeleitung in Wandlängsrichtung	27
4.2	Berücksichtigung der Dispersion in den Passagen	28
5	Zusammenfassung	28
6	Symbolverzeichnis	29
7	Literatur	30

Allgemeines Berechnungsmodell für Plattenwärmeübertrager

Prof. Dr.-Ing. O. Strelow

Technische Hochschule Mittelhessen - FB Maschinenbau Energietechnik
Institut für Thermodynamik, Energieverfahrenstechnik u. Systemanalyse

29.9.1998

1 Ausgangssituation und Aufgabenstellung

Plattenwärmeübertrager weisen aufgrund ihrer hohen spezifischen Übertragungsleistung ein breites industrielles Einsatzspektrum auf. Bezüglich der Prozeßstromführung innerhalb der Apparate existieren unterschiedlichste konstruktive Lösungen. Es ist möglich diese Konstruktionen nach folgenden Kriterien einzuteilen:

- Wärmeübertragung zwischen zwei oder mehr Prozeßströmen
- Parallel und/oder seriell geschaltete Strompassagen
- spiralförmige oder gerade Stromführung
- Gleich- und/oder Gegenstromführung

Diese Merkmale treten häufig kombiniert auf. Sie beeinflussen maßgeblich das Temperaturprofil und damit die thermodynamischen Eigenschaften der Apparate. Für den Konstrukteur ist es beispielsweise während der Entwicklungsphase besonders wichtig, die thermodynamischen Eigenschaften mit geeigneten Modellen vorhersagen zu können, um Kompromisse im Zusammenhang mit anderen Apparateeigenschaften beurteilen zu können.

Die Berechnung von Plattenwärmeübertragern geschieht i.a. über das logarithmische Temperaturmittel, welches mit einem konstruktionsabhängigen Korrekturfaktor versehen wird. Dieses Vorgehen ist bei Berücksichtigung technischer Genauigkeitsansprüche meistens geeignet. Nachteilig ist nur, daß die Gültigkeitsgrenzen dieses Näherungsmodells für konkrete Anwendungsfälle sehr ungewiß und nur durch Vergleich mit einem exakten Modell nachweisbar sind. Darüberhinaus birgt die Anwendung des logarithmischen Temperaturmittels bei der Nachrechnung von Apparaten noch den Nachteil einer iterativen Berechnung, da die zur Bestimmung des Temperaturmittels erforderlichen, unbekannten Austrittstemperaturen vorab zu schätzen und durch mehrmalige Nachrechnung zu verbessern sind.

Im Vortrag wird eine Berechnungsmethode vorgestellt, welche es gestattet, sämtliche o.g. Besonderheiten der Stromführung in Plattenwärmeübertragern zu berücksichtigen. Das zugrundeliegende Modell basiert, in Analogie zu Wärmeträgerschaltungen, auf einer verallgemeinerten Betriebscharakteristik /1/. Mit der Berechnungsmethode ist es möglich, die exakten Lösungen der beschreibenden Differentialgleichungssysteme *bei beliebiger Genauigkeit ohne Iteration* anzunähern.

Die Anwendung dieser Methode erfordert keine spezielle Software. Die Lösung der Modellgleichungen kann mit mathematischer Standardsoftware, wie *Mathcad* oder *Maple*, sehr einfach und übersichtlich erfolgen.

2 Darstellung des allgemeinen Modells für Plattenwärmeübertrager

Das allgemeine Berechnungsmodell für Plattenwärmeübertrager gestattet, ausgehend von den Massendurchsätzen, den spezifischen Wärmekapazitäten, den Wärmeübertragungsflächen, den Wärmedurchgangskoeffizienten sowie den Eintrittstemperaturen die Ermittlung der Austrittstemperaturen sowie sämtlicher Zwischentemperaturen. Sein schematischer Aufbau wird nachfolgend schrittweise an sechs Beispielen mit steigender Komplexität entwickelt und erläuternd dargestellt.

2.1 Gleichstromwärmeübertrager

Der einfachste Fall für die Modellierung ist ein Gleichstromapparat mit zwei Strompassagen (Abbildung 1).

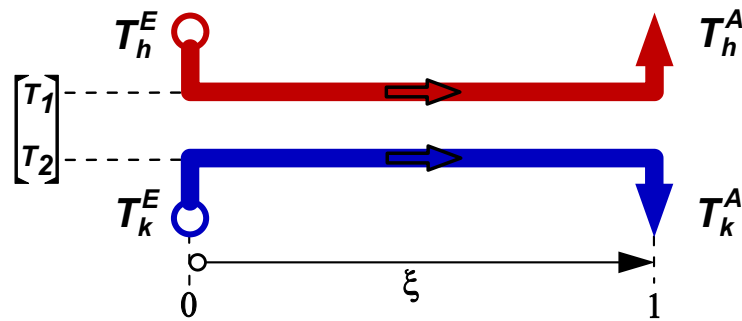


Abbildung 1: Plattenwärmeübertrager nach dem Gleichstromprinzip

Das mathematische Modell wird in Matrizenform dargestellt /2,3/. Es enthält die Koeffizientenmatrix $\underline{\underline{\mathbf{N}}}$ (Übertragungsmatrix) mit den dimensionslosen Übertragungseinheiten, einen beschreibenden Temperaturvektor $\underline{\mathbf{T}}$ sowie dessen Ableitung nach der dimensionslosen Ortskoordinate ς .

$$\frac{d}{d\varsigma} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -N_1 & N_1 \\ N_2 & -N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \quad \text{mit } N_i = \frac{kA}{\dot{C}_i} \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

$$\frac{d}{d\varsigma} \underline{\mathbf{T}} = \underline{\underline{\mathbf{N}}} \underline{\mathbf{T}}$$

Die Lösung dieses Differentialgleichungssystems erfolgt per TAYLOR-Reihen-Entwicklung.

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{(\varsigma)} &= \mathbf{T}_{(0)} + \mathbf{T}'_{(0)}\varsigma + \mathbf{T}''_{(0)}\frac{\varsigma^2}{2!} + \mathbf{T}'''_{(0)}\frac{\varsigma^3}{3!} + \mathbf{T}^{(4)}_{(0)}\frac{\varsigma^4}{4!} + \dots \\
&= \left(\mathbf{E} + \mathbf{N}\varsigma + \frac{\mathbf{N}^2\varsigma^2}{2!} + \frac{\mathbf{N}^3\varsigma^3}{3!} + \frac{\mathbf{N}^4\varsigma^4}{4!} + \dots \right) \mathbf{T}_{(0)} \\
&= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{N}^i\varsigma^i}{i!} \right) \mathbf{T}_{(0)} = \exp(\mathbf{N}\varsigma) \mathbf{T}_{(0)} = \mathbf{\Phi}_{\varsigma} \mathbf{T}_{(0)}
\end{aligned} \tag{2}$$

Das Temperaturprofil an der Stelle ς wird durch die Temperaturprofil-Matrix $\mathbf{\Phi}_{\varsigma}$ ausgedrückt. An n äquidistanten Stellen des Intervalls $\varsigma = [0; 1]$ gilt jeweils für das Temperaturprofil:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{(\Delta\varsigma)} &= \mathbf{\Phi}_{\Delta\varsigma} \mathbf{T}_{(0)} \quad \text{mit} \quad \Delta\varsigma = \frac{1}{n} \\
\mathbf{T}_{(i \cdot \Delta\varsigma)} &= \mathbf{\Phi}_{\Delta\varsigma}^i \mathbf{T}_{(0)}
\end{aligned} \tag{3}$$

Für die Austrittstemperaturen an der Stelle $\varsigma = 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{(\varsigma=1)} &= \exp(\mathbf{N}) \mathbf{T}_{(\varsigma=0)} \\
\mathbf{T}_1 &= \mathbf{\Phi}_1 \cdot \mathbf{T}_0 \\
\mathbf{T}^O &= \mathbf{\Phi}_1 \cdot \mathbf{T}^I
\end{aligned} \tag{4}$$

Die Elemente der Temperaturprofil-Matrizen $\mathbf{\Phi}_{\varsigma}$ und $\mathbf{\Phi}_1$ werden durch Reihen gebildet. Für die Matrix $\mathbf{\Phi}_1$ konvergieren diese zu folgenden Endsummen:

$$\mathbf{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{N_1(1-\exp(-N_1-N_2))}{N_1+N_2} & \frac{N_1(1-\exp(-N_1-N_2))}{N_1+N_2} \\ \frac{N_2(1-\exp(-N_1-N_2))}{N_1+N_2} & 1 - \frac{N_2(1-\exp(-N_1-N_2))}{N_1+N_2} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Die Endsummen sind mit der analytischen Lösung identisch und entsprechen der "klassischen Betriebscharakteristik" für den Gleichstromapparat /4/.

2.2 Gegenstromwärmeübertrager

Ein Gegenstromapparat, gemäß Abbildung 2, wird völlig analog zum Gleichstromapparat behandelt.

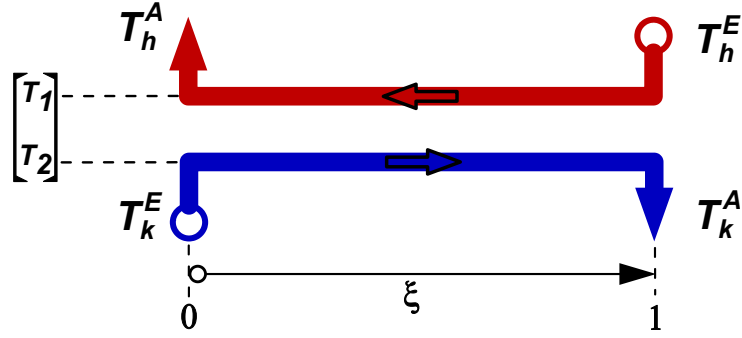


Abbildung 2: Plattenwärmeübertrager nach dem Gegenstromprinzip

Da der obere Prozeßstrom der ζ -Achse entgegenströmt, ändern sich die Vorzeichen der Koeffizienten der entsprechenden Gleichung.

$$\frac{d}{d\zeta} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & -N_1 \\ N_2 & -N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \quad \text{mit } N_i = \frac{kA}{\dot{C}_i} \quad (6)$$

$$\frac{d}{d\zeta} \underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{N}} \underline{\mathbf{T}}$$

Die Lösung dieses Differentialgleichungssystems mittels TAYLOR-Reihe für die Temperaturen an der Stelle $\zeta = 1$ lautet:

$$\underline{\mathbf{T}}_{(\zeta=1)} = \exp \left(\underline{\mathbf{N}} \right) \underline{\mathbf{T}}_{(\zeta=0)} = \underline{\Phi}_1 \underline{\mathbf{T}}_{(\zeta=0)} \quad (7)$$

Die Elemente der Temperaturprofil-Matrix $\underline{\Phi}_1$ konvergieren mit den Endsummen:

$$\underline{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} 1 + \frac{N_1(\exp(N_1-N_2)-1)}{N_1-N_2} & -\frac{N_1(\exp(N_1-N_2)-1)}{N_1-N_2} \\ \frac{N_2(\exp(N_1-N_2)-1)}{N_1-N_2} & 1 - \frac{N_2(\exp(N_1-N_2)-1)}{N_1-N_2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Diese Lösung muß modifiziert werden, weil sowohl an der Stelle $\zeta = 0$ und $\zeta = 1$ jeweils eine bekannte Eintrittstemperatur und eine unbekannte Austrittstemperatur stehen. Durch Umstellen dieses Gleichungssystems wird schließlich erhalten.

$$\underline{\mathbf{T}}^O = \tilde{\underline{\Phi}}_1 \underline{\mathbf{T}}^I \quad (9)$$

mit der gerichteten Temperaturprofil-Matrix

$$\tilde{\underline{\Phi}}_1 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{N_1(\exp(N_1-N_2)-1)}{N_1 \exp(N_1-N_2)-N_2} & \frac{N_1(\exp(N_1-N_2)-1)}{N_1 \exp(N_1-N_2)-N_2} \\ \frac{N_2(\exp(N_1-N_2)-1)}{N_1 \exp(N_1-N_2)-N_2} & 1 - \frac{N_2(\exp(N_1-N_2)-1)}{N_1 \exp(N_1-N_2)-N_2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Die Quotienten der Elemente der Matrix $\tilde{\underline{\Phi}}_1$ sind mit der analytischen Lösung und somit der Betriebscharakteristik für Gegenstromapparate identisch /4/.

2.3 Gegenstromplattenwärmeübertrager

Der bisherige Stand des Lösungsalgorithmus wird nachfolgend auf einen Plattenwärmeübertrager mit $p = 8$ Strompassagen angewendet. Abbildung 3 zeigt das Schema dieses Apparates:

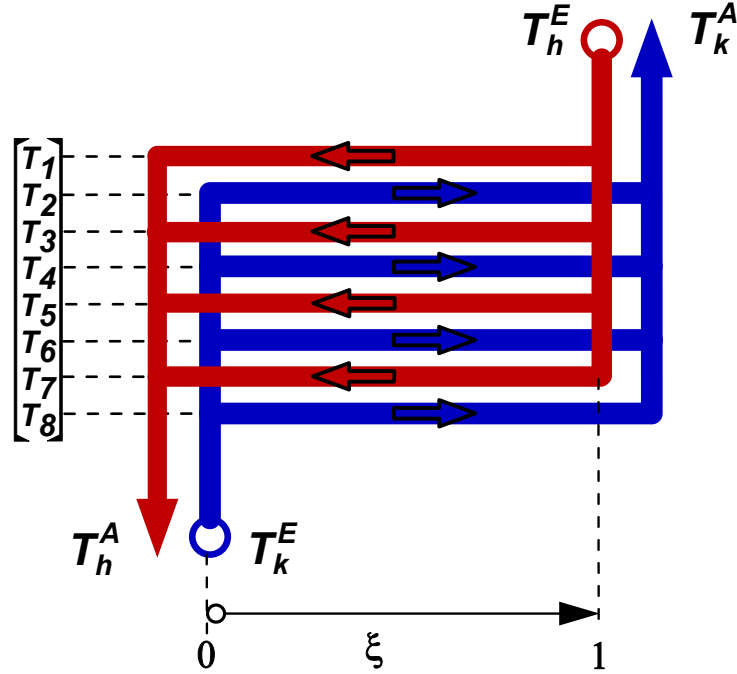


Abbildung 3: Plattenwärmeübertrager im Gegenstromprinzip mit acht Strompassagen

Es ist günstig die Übertragungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{N}}}$ des beschreibenden Differentialgleichungssystems für Apparate mit mehreren Passagen durch formale Matrizenoperationen zu generieren. Es gilt:

$$\frac{d}{d\varsigma} \underline{\underline{\mathbf{T}}} = \underline{\underline{\mathbf{N}}} \underline{\underline{\mathbf{T}}} \quad (11)$$

$$\text{mit } \underline{\underline{\mathbf{N}}} = -\underline{\underline{\dot{\mathbf{C}}}}_p^{-1} \underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\mathbf{L}}} \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T$$

Die Kapazitäts-Matrix $\underline{\underline{\dot{\mathbf{C}}}}_p$ ist eine Diagonalmatrix des Formates $(p \times p)$. Ihre Hauptdiagonale enthält die Wärmekapazitätsströme in den einzelnen Passagen. Das Vorzeichen gibt die Strömungsrichtung an. Ein positives bzw. negatives Vorzeichen bedeutet Strömung in Richtung der ς -Achse bzw. umgekehrt.

$$\underline{\underline{\dot{\mathbf{C}}}}_p = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\dot{C}_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\dot{C}_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}\dot{C}_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}\dot{C}_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4}\dot{C}_h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}\dot{C}_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4}\dot{C}_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}\dot{C}_k \end{bmatrix} \quad (12)$$

Die Leitwert-Matrix $\underline{\underline{\mathbf{L}}}$ ist ebenfalls eine Diagonalmatrix mit dem Format $(p-1) \times (p-1)$. Sie enthält die reziproken Wärmewiderstände zwischen den Passagen.

$$\underline{\underline{\mathbf{L}}} = \begin{bmatrix} kA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & kA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & kA & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & kA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & kA & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & kA & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & kA \end{bmatrix} \quad (13)$$

Die Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ ist eine Bandmatrix mit dem Format $p \times (p-1)$. Sie beschreibt die thermischen Kopplungen der Passagen.

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Für die Kopplungsmatrix gilt die Konvention, daß der Wärmestrom von der Passage geringerer Ordinalzahl zur Passage höherer Ordinalzahl fließt. Anderenfall ergibt sich ein negatives das Vorzeichen. Für die treibenden Temperaturdifferenzen zwischen den Passagen gilt:

$$\begin{bmatrix} \Delta T_{12} \\ \Delta T_{23} \\ \Delta T_{34} \\ \Delta T_{45} \\ \Delta T_{56} \\ \Delta T_{67} \\ \Delta T_{78} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\underline{\underline{\Delta \mathbf{T}}} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T \underline{\underline{\mathbf{T}}}$$

Die Wärmeströme zwischen den Passagen ergeben sich

$$\frac{d}{d\zeta} \begin{bmatrix} \dot{Q}_{12} \\ \dot{Q}_{23} \\ \dot{Q}_{34} \\ \dot{Q}_{45} \\ \dot{Q}_{56} \\ \dot{Q}_{67} \\ \dot{Q}_{78} \end{bmatrix} = \frac{d}{d\zeta} \begin{bmatrix} kA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & kA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & kA & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & kA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & kA & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & kA & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & kA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T_{12} \\ \Delta T_{23} \\ \Delta T_{34} \\ \Delta T_{45} \\ \Delta T_{56} \\ \Delta T_{67} \\ \Delta T_{78} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\zeta} \underline{\dot{\mathbf{Q}}} &= -\frac{d}{d\zeta} \underline{\underline{\mathbf{L}}} \underline{\underline{\mathbf{T}}} \\ &= -\underline{\underline{\mathbf{L}}} \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T \underline{\underline{\mathbf{T}}} \end{aligned}$$

Die differentielle Enthalpiebilanz wird formuliert:

$$\frac{d}{d\zeta} \begin{bmatrix} \dot{H}_1 \\ \dot{H}_2 \\ \dot{H}_3 \\ \dot{H}_4 \\ \dot{H}_5 \\ \dot{H}_6 \\ \dot{H}_7 \\ \dot{H}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{d\zeta} \begin{bmatrix} \dot{Q}_{12} \\ \dot{Q}_{23} \\ \dot{Q}_{34} \\ \dot{Q}_{45} \\ \dot{Q}_{56} \\ \dot{Q}_{67} \\ \dot{Q}_{78} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\zeta} \underline{\dot{\mathbf{H}}} &= \underline{\underline{\mathbf{K}}} \frac{d}{d\zeta} \underline{\dot{\mathbf{Q}}} \\ &= -\underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\mathbf{L}}} \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T \underline{\underline{\mathbf{T}}} \end{aligned}$$

Die Temperaturänderung in den Passagen ergeben zu

$$\frac{d}{d\zeta} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{\dot{C}_h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{\dot{C}_k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{\dot{C}_h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{\dot{C}_k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{\dot{C}_h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{\dot{C}_k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{\dot{C}_h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{\dot{C}_k} \end{bmatrix} \frac{d}{d\zeta} \begin{bmatrix} \dot{H}_1 \\ \dot{H}_2 \\ \dot{H}_3 \\ \dot{H}_4 \\ \dot{H}_5 \\ \dot{H}_6 \\ \dot{H}_7 \\ \dot{H}_8 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\zeta} \underline{\mathbf{T}} &= \underline{\dot{\mathbf{C}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{T}}} \\ &= -\underline{\dot{\mathbf{C}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\mathbf{L}}} \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T \underline{\underline{\mathbf{T}}} \end{aligned}$$

Für die Übertragungsmatrix erhält man gemäß Gleichung 11

$$\underline{\underline{\mathbf{N}}} = \begin{bmatrix} N_h & -N_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_k & -2N_k & N_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -N_h & 2N_h & -N_h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_k & -2N_k & N_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_h & 2N_h & -N_h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_k & -2N_k & N_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_h & 2N_h & -N_h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_k & -N_k \end{bmatrix} \quad (19)$$

Für das beschreibende Differentialgleichungssystem dieses Beispiels existiert keine rein analytische Lösung. Für

$$N_h = \frac{4kA}{\dot{C}_h} = 1.0251 \quad \text{und} \quad N_k = \frac{4kA}{\dot{C}_h} = 1.0251 \quad (20)$$

folgt nach TAYLOR-Entwicklung die Temperaturprofil-Matrix $\underline{\underline{\Phi}}_1$, welche den Zusammenhang zwischen dem Temperaturvektor an der Stelle $\varsigma = 0$ und dem Temperaturvektor an der Stelle $\varsigma = 1$ herstellt.

$$\underline{\underline{\Phi}}_1 = \begin{bmatrix} 2.603 & -1.398 & -0.276 & 0.068 & 0.005 & -0.001 & 0.0 & 0.0 \\ 0.280 & 0.369 & 0.542 & -0.176 & -0.018 & 0.004 & 0.000 & 0.0 \\ -0.276 & -2.709 & 6.969 & -2.686 & -0.394 & 0.090 & 0.006 & -0.001 \\ -0.014 & -0.176 & 0.537 & 0.305 & 0.537 & -0.176 & -0.018 & 0.004 \\ 0.005 & 0.090 & -0.394 & -2.686 & 6.970 & -2.686 & -0.393 & 0.095 \\ 0.0 & 0.004 & -0.018 & -0.176 & 0.537 & 0.305 & 0.5363 & -0.189 \\ 0.0 & -0.001 & 0.006 & 0.090 & -0.393 & -2.682 & 6.945 & -2.965 \\ 0.0 & 0.0 & 0.000 & 0.004 & -0.019 & -0.189 & 0.593 & 0.611 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Die Matrix $\underline{\underline{\Phi}}_1$ ist zu modifizieren, um den Zusammenhang zwischen den Temperaturen am Ein- und Ausgang der Passagen zu erhalten. Dies geschieht durch partielle Invertierung. Hierzu ist die Definition der Richtungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$ erforderlich.

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Die Richtungsmatrix ist eine Diagonalmatrix. Der Wert +1 oder -1 gibt die Fließrichtung des Prozeßstroms in der Passage an. Entsprechend dieser Matrix ist das Gleichungssystem partiell zu invertieren. Es gilt:

$$\tilde{\underline{\underline{\Phi}}}_1 = \left((\underline{\underline{\mathbf{E}}} + \underline{\underline{\mathbf{R}}}) - \underline{\underline{\Phi}}_1 (\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \underline{\underline{\mathbf{R}}}) \right)^{-1} \left(\underline{\underline{\Phi}}_1 (\underline{\underline{\mathbf{E}}} + \underline{\underline{\mathbf{R}}}) - (\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \underline{\underline{\mathbf{R}}}) \right) \quad (23)$$

Die gerichtete Temperaturprofil-Matrix $\underline{\tilde{\Phi}}_1$ berücksichtigt die Fließrichtung der Prozeßströme in den Passagen und stellt den Zusammenhang zwischen den Ein- und Austrittstemperaturen der Passagen her. Es gilt:

$$\begin{bmatrix} T_1^o \\ T_2^o \\ T_3^o \\ T_4^o \\ T_5^o \\ T_6^o \\ T_7^o \\ T_8^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.386 & 0.581 & 0.015 & 0.017 & 0.001 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.116 & 0.755 & 0.082 & 0.043 & 0.002 & 0.002 & 0.0 & 0.0 \\ 0.018 & 0.412 & 0.145 & 0.409 & 0.008 & 0.010 & 0.0 & 0.0 \\ 0.003 & 0.043 & 0.082 & 0.744 & 0.082 & 0.042 & 0.002 & 0.2 \\ 0.0 & 0.010 & 0.008 & 0.409 & 0.144 & 0.409 & 0.008 & 0.011 \\ 0.0 & 0.002 & 0.002 & 0.042 & 0.082 & 0.745 & 0.082 & 0.046 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.010 & 0.008 & 0.409 & 0.144 & 0.428 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.002 & 0.002 & 0.046 & 0.086 & 0.864 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^i \\ T_2^i \\ T_3^i \\ T_4^i \\ T_5^i \\ T_6^i \\ T_7^i \\ T_8^i \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{T}}^o = \underline{\tilde{\Phi}}_1 \underline{\mathbf{T}}^i \quad (24)$$

Um die Austrittstemperaturen aus den Passagen berechnen zu können, ist es notwendig, die Eintrittstemperatur des heißen Stroms den entsprechenden Passagen mit ungerader Ordinalzahl und analog die Eintrittstemperatur des kalten Stroms den entsprechenden Passagen mit gerader Ordinalzahl zuzuordnen. Hierzu wird die Input-Matrix definiert.

$$\begin{bmatrix} T_1^i \\ T_2^i \\ T_3^i \\ T_4^i \\ T_5^i \\ T_6^i \\ T_7^i \\ T_8^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_h^I \\ T_k^I \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{T}}^i = \underline{\mathbf{I}} \underline{\mathbf{T}}^I \quad (25)$$

Die Information der Input-Matrix: Tritt der j-te Prozeßstrom in die i-te Passage ein, so ist das Element (i,j) der Inputmatrix gleich Eins anderenfall ist es Null. Es gilt

$$\underline{\mathbf{T}}^o = \underline{\tilde{\Phi}}_1 \underline{\mathbf{T}}^i = \underline{\tilde{\Phi}}_1 \underline{\mathbf{I}} \underline{\mathbf{T}}^I = \underline{\Phi}^o \underline{\mathbf{T}}^I \quad (26)$$

Mit den Eintrittstemperaturen

$$\underline{\mathbf{T}}^I = \begin{bmatrix} 120 \\ 20 \end{bmatrix} ^\circ C$$

ergibt sich die Apparatematrix

$$\begin{bmatrix} 60.2 \\ 40.1 \\ 36.8 \\ 36.9 \\ 36.1 \\ 36.6 \\ 35.3 \\ 28.8 \end{bmatrix}^{\circ C} = \begin{bmatrix} 0.402 & 0.598 \\ 0.201 & 0.799 \\ 0.168 & 0.832 \\ 0.169 & 0.831 \\ 0.161 & 0.839 \\ 0.166 & 0.834 \\ 0.153 & 0.847 \\ 0.088 & 0.912 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 120 \\ 20 \end{bmatrix}^{\circ C} \quad (27)$$

$$\underline{\mathbf{T}}^o = \underline{\underline{\Phi}}^o \underline{\mathbf{T}}^I$$

Sehr deutlich ist die ungleiche Wärmetübertragung der einzelnen Passagen infolge des Randeffectes zu sehen. Dieser Effect entsteht, indem die Randpassagen nur an einer Seite gekühlt bzw. beheizt werden.

Die Austrittstemperaturen am Apparateausgang sind die Mittelwerte der Austrittstemperaturen der Passagen. Zur Bestimmung der Apparateaustrittstemperaturen ist eine Output-Modell zu definieren. Die Information der Output-Matrix ist: Verläßt der x-te Teil des i-ten Prozeßstroms aus Passage j den Apparat so enthält das Matrix-Element (i,j) den Wert x. Es folgt:

$$\begin{bmatrix} 42.1 \\ 35.6 \end{bmatrix}^{\circ C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60.2 \\ 40.1 \\ 36.8 \\ 36.9 \\ 36.1 \\ 36.6 \\ 35.3 \\ 28.8 \end{bmatrix}^{\circ C} \quad (28)$$

$$\underline{\mathbf{T}}^O = \underline{\underline{\Omega}} \underline{\mathbf{T}}^o$$

Aufgrund des Randeffectes zeigt dieser Apparat ein leicht vom idealen Gegenstrom abweichendes stationäres Verhalten.

2.4 Plattenwärmeübertrager mit Serien-Parallel-Schaltung

Bei stark unterschiedlichen Volumenströmen der Medien ist es möglich Passagen nicht nur parallel sondern auch seriell zu schalten. Eine solche Prozeßstromführung ist in Abbildung 4 dargestellt.

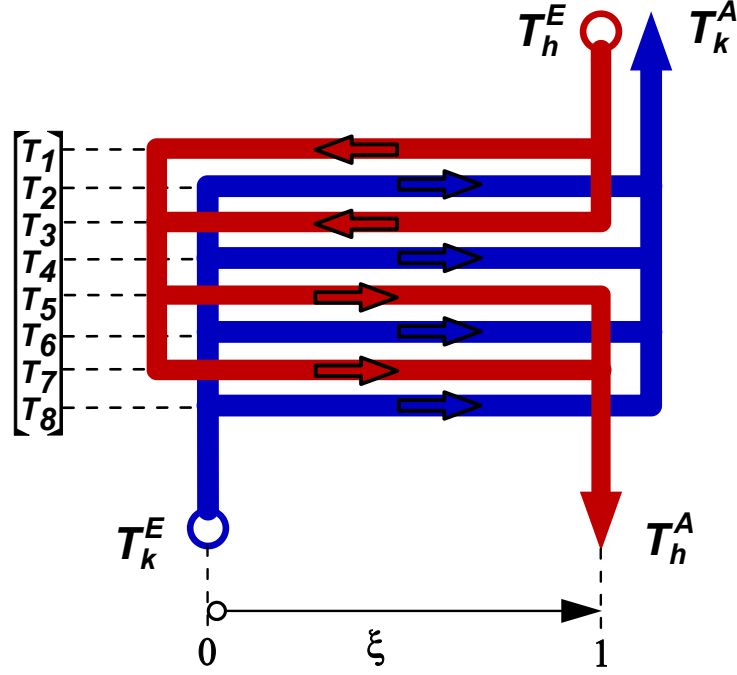


Abbildung 4: Plattenwärmeübertrager mit Serien-Parallel-Schaltung

Durch diese Stromführung wird zwar der Nachteil von zu geringen Strömungsgeschwindigkeiten vermieden, jedoch entsteht dafür ein Mix aus Gleich- und Gegenstromführung. Dies bedeutet für das Modell eine weitere Modifizierung. Der Lösungsweg bis zur Bestimmung der gerichteten Temperaturprofil-Matrix $\underline{\tilde{\Phi}}_1$ ist mit der bisherigen Vorgehensweise nach 2.2 und 2.3 identisch. Analog wird ebenfalls eine Input- und eine Output-Matrix formuliert.

$$\underline{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{O}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Bei diesem Apparat besteht jedoch die Besonderheit, daß die Eintrittstemperatur in die Passagen 5 und 7 der Mittelwert der Austrittstemperaturen von Passage 1 und 3 ist. Somit befinden sich unbekannte Größen in den Vektoren der Ein- und Austrittstemperaturen der Passagen. Es ist daher notwendig, für die innere Verschaltung des Apparates ein Strukturmodell zu definieren. Dieses Strukturmodell enthält neben der bereits eingeführten Input-Matrix eine Strukturmatrix. Ihre Information ist: Enthält der in die i-te Passage eintretende Prozeßstrom den aus Passage j austretenden Strom mit dem Anteil

x , so ist der Wert des Matrix-Elementes (i,j) gleich x. Es gilt:

$$\begin{bmatrix} T_1^i \\ T_2^i \\ T_3^i \\ T_4^i \\ T_5^i \\ T_6^i \\ T_7^i \\ T_8^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^o \\ T_2^o \\ T_3^o \\ T_4^o \\ T_5^o \\ T_6^o \\ T_7^o \\ T_8^o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_h^I \\ T_k^I \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}^i = \underline{\underline{\mathbf{S}}} \underline{\underline{\mathbf{T}}}^o + \underline{\underline{\mathbf{I}}} \underline{\underline{\mathbf{T}}}^I$$

Die Gleichungen 30 und 24 bilden ein Gleichungssystem, welches explizit nach dem Vektor $\underline{\underline{\mathbf{T}}}^o$ auflösbar ist. Es ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} 84.3 \\ 45.6 \\ 61.4 \\ 37.5 \\ 44.8 \\ 31.4 \\ 42.9 \\ 26.3 \end{bmatrix} {}^{\circ}C = \begin{bmatrix} 0.643 & 0.357 \\ 0.256 & 0.744 \\ 0.414 & 0.586 \\ 0.175 & 0.825 \\ 0.248 & 0.752 \\ 0.114 & 0.886 \\ 0.229 & 0.771 \\ 0.063 & 0.937 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 120 \\ 20 \end{bmatrix} {}^{\circ}C \quad (31)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}^o = \left(\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \underline{\underline{\Phi}}_1 \underline{\underline{\mathbf{S}}} \right)^{-1} \underline{\underline{\Phi}}_1 \underline{\underline{\mathbf{I}}} \underline{\underline{\mathbf{T}}}^I$$

bzw. für den Vektor der Apparteaustrittstemperaturen

$$\begin{bmatrix} 43.9 \\ 35.2 \end{bmatrix} {}^{\circ}C = \begin{bmatrix} 0.239 & 0.761 \\ 0.152 & 0.848 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 120 \\ 20 \end{bmatrix} {}^{\circ}C \quad (32)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}^o = \underline{\underline{\mathbf{O}}} \left(\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \underline{\underline{\Phi}}_1 \underline{\underline{\mathbf{S}}} \right)^{-1} \underline{\underline{\Phi}}_1 \underline{\underline{\mathbf{I}}} \underline{\underline{\mathbf{T}}}^I$$

$$= \underline{\underline{\Phi}}^O \underline{\underline{\mathbf{T}}}^I$$

Die Matrix $\underline{\underline{\Phi}}^O$ ist in Analogie zu Gleichung 5 sowie Gleichung 10 als Betriebscharakteristik des Apparates gemäß Abbildung 4 anzusehen.

2.5 Plattenwärmeübertrager für drei Prozeßströme

Plattenwärmeübertrager für mehr als zwei Prozeßströme finden z.B. in der Tieftemperaturtechnik Anwendung. Typisch für diese Apparate ist, daß die durchfluteten Passagen aufgrund unterschiedlicher Temperaturniveaus der Prozeßströme unterschiedliche Längen aufweisen. Abbildung 5 stellt einen solchen Apparat dar.

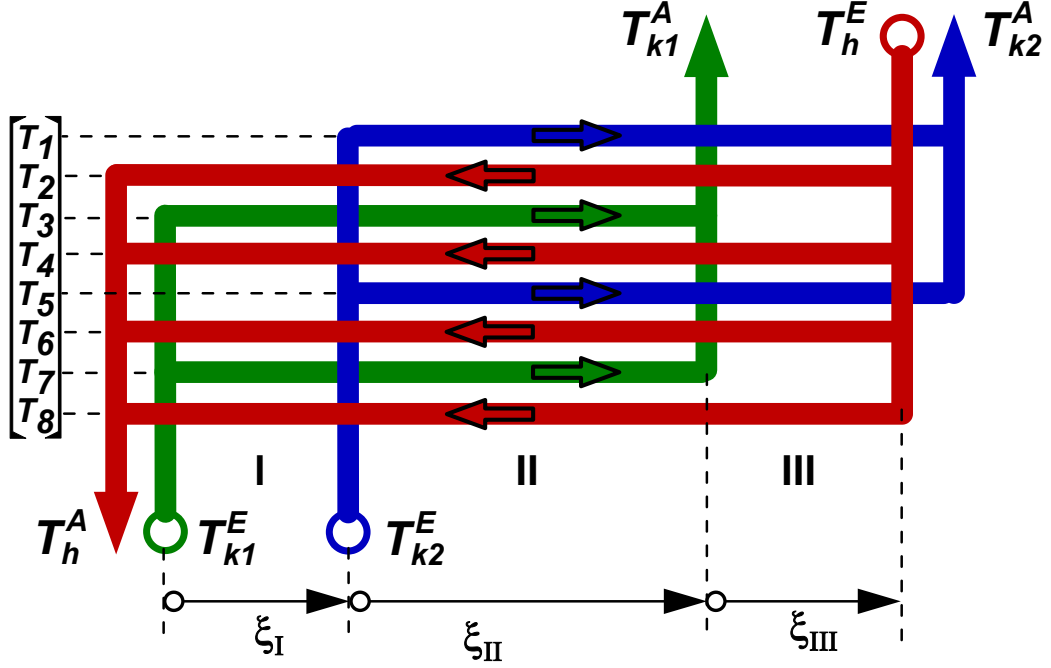


Abbildung 5: Plattenwärmeübertrager für drei Prozeßströme

Aufgrund der unterschiedlichen Längen der Strompassagen ist es erforderlich diesen Apparat in die Abschnitte I, II und III zu zerlegen. Jeder Abschnitt ist zunächst separat zu behandeln, d.h. für jeden Abschnitt ist die Übertragungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{N}}}_i$ zu bestimmen, indem unterschiedliche Kopplungsmatrizen verwendet werden. Die Matrix $\underline{\underline{\mathbf{L}}}$ wird gemäß Gleichung 13 formuliert. Die Kapazitätsmatrix $\underline{\underline{\dot{\mathbf{C}}}}_p$ ist allgemein aus Struktur-, Input- und Output-Matrix ($\underline{\underline{\mathbf{S}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ und $\underline{\underline{\mathbf{O}}}$) ermittelbar.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\dot{\mathbf{C}}}}_p &= (\underline{\underline{\mathbf{E}}} + \underline{\underline{\mathbf{S}}}^T)^{-1} \underline{\underline{\mathbf{O}}}^T \underline{\underline{\mathbf{O}}} (\underline{\underline{\mathbf{E}}} + \underline{\underline{\mathbf{S}}})^{-1} \underline{\underline{\mathbf{I}}} \underline{\underline{\dot{\mathbf{C}}}} \\ \underline{\underline{\dot{\mathbf{C}}}}_p &= \text{diag} \left(\underline{\underline{\dot{\mathbf{C}}}}_p \right) \end{aligned} \quad (33)$$

Gemäß obiger Beziehung werden die Wärmekapazitätsströme der Passagen als Spaltenvektor erhalten. Dieser ist in eine Diagonalmatrix zu konvertieren

Im ersten Abschnitt des Wärmeübertragers nehmen nur der heiße Strom in den Passagen 2, 4, 6, 8 und der erste kalte Strom in den Passagen 3, 7 an der Wärmeübertragung teil. Damit lautet die Kopplungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_I$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Es folgt für die Übertragungsmatrix:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\mathbf{N}}}_I &= -\dot{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_I \underline{\underline{\mathbf{L}}} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_I^T \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_h & -N_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{k1} & -2N_{k1} & N_{k1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N_h & N_h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_h & -N_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{k1} & -2N_{k1} & N_{k1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_h & N_h \end{pmatrix} \quad (35)
\end{aligned}$$

Die Temperaturprofil-Matrix $\underline{\underline{\Phi}}_{1I}$ wird gemäß Gleichung 4 erhalten. Völlig analog werden die Abschnitte II und III behandelt. Aufgrund der Reihenschaltung der drei Abschnitte gelten die Kopplungsbedingungen:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{1I} &= \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{0II} \\
\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{1II} &= \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{0III}
\end{aligned} \quad (36)$$

Hieraus folgt, daß die Temperaturprofil-Matrix $\underline{\underline{\Phi}}_1$ des Apparates das Produkt der drei Temperaturprofil-Matrizen $\underline{\underline{\Phi}}_{1i}$ der einzelnen Abschnitte ist.

$$\underline{\underline{\Phi}}_1 = \underline{\underline{\Phi}}_{1I} \underline{\underline{\Phi}}_{1II} \underline{\underline{\Phi}}_{1III} \quad (37)$$

Die erhaltene Matrix $\underline{\underline{\Phi}}_1$ wird nachfolgend gemäß 31 partiell invertiert. Für die Richtungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$ gilt allgemein:

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}} = \dot{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}^{-1} \text{abs} \left(\dot{\underline{\underline{\mathbf{C}}}} \right) \quad (38)$$

Der weitere Berechnungsalgorithmus entspricht den Gleichungen 31 und 32.

2.6 Spiralplattenwärmeübertrager

Für den Spiralwärmeübertrager existieren Näherungsansätze /5/. Mit den vorgestellten Matrizengleichungen ist ebenfalls möglich einen Plattenwärmeübertrager zu modellieren, dessen Passagen Spiralen sind. Abbildung 6 zeigt das Prinzip eines derartigen Apparates.

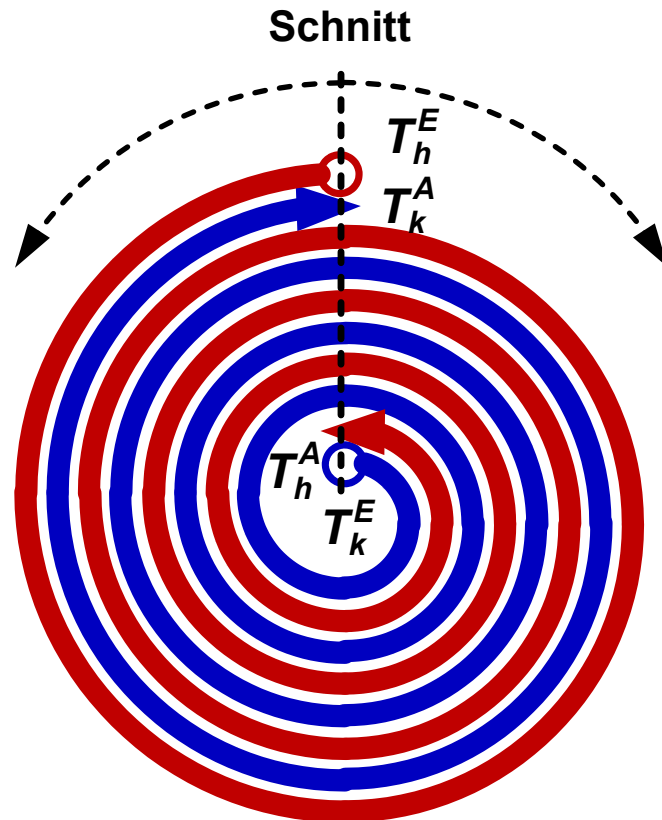


Abbildung 6: Prinzip eines Spiralplattenwärmeübertragers

Um diesen Apparat modellieren und berechnen zu können wird er gedanklich in einen "gewöhnlichen" Plattenwärmeübertrager überführt. Dies geschieht indem er gemäß Abbildung 7 "aufgeschnitten und abgerollt" wird.

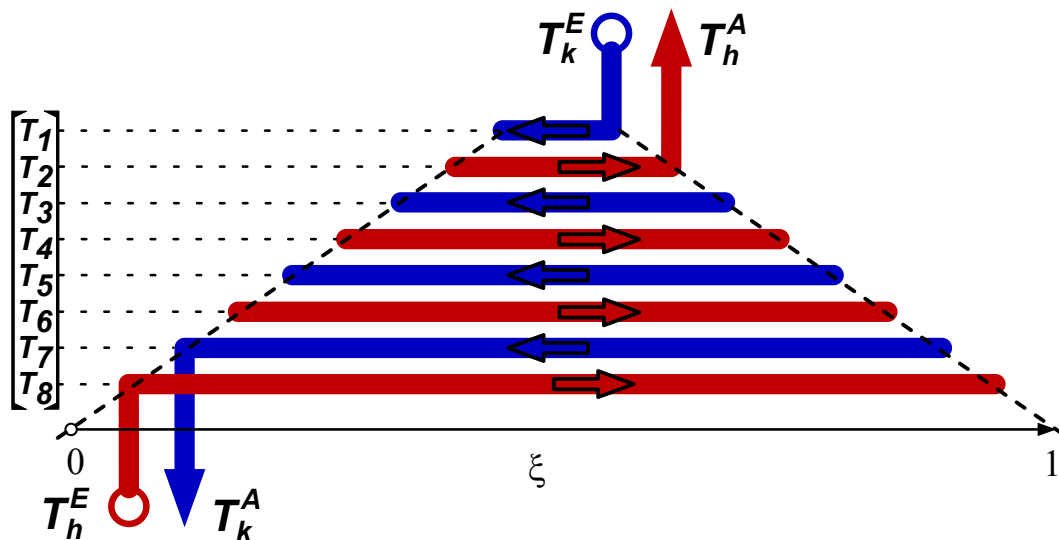


Abbildung 7: Schema des abgewickelten Plattenwärmeübertragers

Da jetzt ein "gewöhnlicher" Plattenapparat vorliegt, erfolgt seine Berechnung gemäß dem

vorgestellten Schema. In der Leitwert-Matrix $\underline{\underline{\mathbf{L}}}$ sind die unterschiedlichen reziproken Wärmeübergangswiderstände kA zu berücksichtigen. Die Struktur-, Input- und Outputmatrix sind nach den aufgestellten Regeln zu parametrieren:

Liegen die Anschlüsse des Spiralapparates, im Gegensatz zu dem ausgeführten Beispiel, nicht auf einer Ebene, so ist eine abschnittsweise Berechnung erforderlich, wie im vorigen Punkt beschrieben, ist.

3 Zusammenfassende Darstellung des Plattenwärmeübertragermodells

Das im vorangegangenen Abschnitt an Beispielen entwickelte Modell ist formal auf alle Plattenwärmeübertrager (ausgenommen sind Kreuzstromapparate) anwendbar. Diese Methode wird nachfolgend in kompakter Form dargestellt. Weiterhin sind die Parametrierungen der beschreibenden Matrizen und Vektoren sowie die Resultate für die angeführten Beispiele aufgeführt.

3.1 Berechnungsalgorithmus

- Ermittlung der Kapazitätsmatrix $\underline{\underline{\dot{\mathbf{C}}}}_p$

$$\underline{\underline{\dot{\mathbf{C}}}}_p = (\underline{\underline{\mathbf{E}}} \pm \underline{\underline{\mathbf{S}}}^T)^{-1} \underline{\underline{\mathbf{O}}}^T \underline{\underline{\mathbf{O}}} (\underline{\underline{\mathbf{E}}} \pm \underline{\underline{\mathbf{S}}})^{-1} \underline{\underline{\mathbf{I}}} \underline{\underline{\dot{\mathbf{C}}}} \quad \begin{array}{l} + \text{ gilt für ebene Platten} \\ - \text{ gilt für Spiralen} \end{array}$$

$$\underline{\underline{\dot{\mathbf{C}}}}_p = \text{diag} \left(\underline{\underline{\dot{\mathbf{C}}}}_p \right)$$

- Ermittlung der Übertragungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{N}}}$ und Temperatur-Profil-Matrix $\underline{\underline{\Phi}}_1$

$$\underline{\underline{\mathbf{N}}}_i = -\underline{\underline{\dot{\mathbf{C}}}}_p^{-1} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_i \underline{\underline{\mathbf{L}}} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_i^T$$

$$\underline{\underline{\Phi}}_{1i} = \exp(\underline{\underline{\mathbf{N}}}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\underline{\underline{\mathbf{N}}}^i}{i!} = \underline{\underline{\mathbf{E}}} + \underline{\underline{\mathbf{N}}} + \frac{\underline{\underline{\mathbf{N}}}^2}{2!} + \frac{\underline{\underline{\mathbf{N}}}^3}{3!} + \frac{\underline{\underline{\mathbf{N}}}^4}{4!} + \dots$$

$$\underline{\underline{\Phi}}_1 = \prod_{i=1}^n \underline{\underline{\Phi}}_{1i} \quad (\text{für } n \text{ Abschnitte})$$

- Bestimmung der Richtungsmatrix $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$ sowie der gerichteten Temperatur-Profil-Matrix $\underline{\underline{\tilde{\Phi}}}_1$

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}} = \underline{\underline{\dot{\mathbf{C}}}}_p^{-1} \text{abs} \left(\underline{\underline{\dot{\mathbf{C}}}}_p \right)$$

$$\underline{\underline{\tilde{\Phi}}}_1 = \left((\underline{\underline{\mathbf{E}}} + \underline{\underline{\mathbf{R}}}) - \underline{\underline{\Phi}}_1 (\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \underline{\underline{\mathbf{R}}}) \right)^{-1} \left(\underline{\underline{\Phi}}_1 (\underline{\underline{\mathbf{E}}} + \underline{\underline{\mathbf{R}}}) - (\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \underline{\underline{\mathbf{R}}}) \right)$$

- Ermittlung der Apparatematrizen $\underline{\underline{\Phi}}^o$ und $\underline{\underline{\Phi}}^O$

$$\underline{\underline{\Phi}}^o = \left(\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \underline{\underline{\Phi}}_1 \underline{\underline{\mathbf{S}}} \right)^{-1} \underline{\underline{\Phi}}_1 \underline{\underline{\mathbf{I}}}$$

$$\underline{\underline{\Phi}}^O = \underline{\underline{\mathbf{O}}} \underline{\underline{\Phi}}^o = \underline{\underline{\mathbf{O}}} \left(\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \underline{\underline{\Phi}}_1 \underline{\underline{\mathbf{S}}} \right)^{-1} \underline{\underline{\Phi}}_1 \underline{\underline{\mathbf{I}}}$$

- Berechnung der Zwischentemperaturen $\underline{\underline{\mathbf{T}}}^o$ und Ausgangstemperaturen $\underline{\underline{\mathbf{T}}}^O$

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}^o = \underline{\underline{\Phi}}^o \underline{\underline{\mathbf{T}}}^I$$

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}^O = \underline{\underline{\Phi}}^O \underline{\underline{\mathbf{T}}}^I$$

3.2 Beispiele

3.2.1 Gleichstromwärmeübertrager

- Prozeßstromdaten

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}^I = \begin{bmatrix} 120 \\ 20 \end{bmatrix} ^\circ C \quad \underline{\underline{\dot{\mathbf{C}}}} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 1.0 \end{bmatrix} \frac{kW}{K}$$

- Apparatedaten

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{I}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{K}}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{O}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{L}}} = \begin{bmatrix} 0.358 \end{bmatrix} \frac{kW}{K}$$

- Ergebnisse

$$\underline{\underline{\Phi}}^o = \begin{bmatrix} 0.263 & 0.737 \\ 0.147 & 0.853 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{T}}}^o = \begin{bmatrix} 46.3 \\ 34.7 \end{bmatrix} ^\circ C$$

$$\underline{\underline{\Phi}}^O = \begin{bmatrix} 0.263 & 0.737 \\ 0.147 & 0.853 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{T}}}^O = \begin{bmatrix} 46.3 \\ 34.7 \end{bmatrix} ^\circ C$$

3.2.2 Gegenstromwärmeübertrager

- Prozeßstromdaten

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}^I = \begin{bmatrix} 120 \\ 20 \end{bmatrix} ^\circ C \quad \underline{\underline{\dot{\mathbf{C}}}} = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 1.0 \end{bmatrix} \frac{kW}{K}$$

- Apparatedaten

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{I}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{K}}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{O}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{L}}} = \begin{bmatrix} 0.358 \end{bmatrix} \frac{kW}{K}$$

- Ergebnisse

$$\underline{\underline{\Phi}}^o = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.80 \\ 0.16 & 0.84 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{T}}}^o = \begin{bmatrix} 40.0 \\ 36.0 \end{bmatrix} ^\circ C$$

$$\underline{\underline{\Phi}}^O = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.80 \\ 0.16 & 0.84 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{T}}}^O = \begin{bmatrix} 40.0 \\ 36.0 \end{bmatrix} ^\circ C$$

3.2.3 Gegenstromplattenwärmeübertrager

- Prozeßstromdaten

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}^I = \begin{bmatrix} 120 \\ 20 \end{bmatrix} ^\circ C \quad \underline{\underline{\dot{\mathbf{C}}}} = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 1.0 \end{bmatrix} \frac{kW}{K}$$

- Apparatedaten

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{I}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{O}}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{L}}} = \begin{bmatrix} .051 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .051 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .051 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .051 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .051 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .051 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .051 \end{bmatrix} \frac{kW}{K}$$

- Ergebnisse

$$\underline{\underline{\Phi}}^o = \begin{bmatrix} 0.402 & 0.598 \\ 0.201 & 0.799 \\ 0.168 & 0.832 \\ 0.169 & 0.831 \\ 0.161 & 0.839 \\ 0.166 & 0.834 \\ 0.153 & 0.847 \\ 0.088 & 0.912 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{T}}}^o = \begin{bmatrix} 60.2 \\ 40.1 \\ 36.8 \\ 36.9 \\ 36.1 \\ 36.6 \\ 35.3 \\ 28.8 \end{bmatrix} ^\circ C$$

$$\underline{\underline{\Phi}}^O = \begin{bmatrix} 0.221 & 0.779 \\ 0.156 & 0.844 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{T}}}^O = \begin{bmatrix} 42.1 \\ 35.6 \end{bmatrix} ^\circ C$$

3.2.4 Plattenwärmeübertrager mit Serien-Parallel-Schaltung

- Prozeßstromdaten

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}^I = \begin{bmatrix} 120 \\ 20 \end{bmatrix} ^\circ C \quad \underline{\underline{\dot{\mathbf{C}}}} = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 1.0 \end{bmatrix} \frac{kW}{K}$$

- Apparatedaten

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{I}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{O}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{L}}} = \begin{bmatrix} .051 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .051 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .051 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .051 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .051 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .051 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .051 \end{bmatrix} \frac{kW}{K}$$

- Ergebnisse

$$\underline{\underline{\Phi}}^o = \begin{bmatrix} 0.643 & 0.357 \\ 0.256 & 0.744 \\ 0.414 & 0.586 \\ 0.175 & 0.825 \\ 0.248 & 0.752 \\ 0.114 & 0.886 \\ 0.229 & 0.771 \\ 0.063 & 0.937 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{T}}}^o = \begin{bmatrix} 84.3 \\ 45.6 \\ 61.4 \\ 37.5 \\ 44.8 \\ 31.4 \\ 42.9 \\ 26.3 \end{bmatrix} ^\circ C$$

$$\underline{\underline{\Phi}}^O = \begin{bmatrix} 0.239 & 0.761 \\ 0.152 & 0.848 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{T}}}^O = \begin{bmatrix} 43.9 \\ 35.2 \end{bmatrix} ^\circ C$$

3.2.5 Plattenwärmeübertrager mit drei Prozeßströmen

- Prozeßstromdaten

$$\underline{\mathbf{T}}^I = \begin{bmatrix} 120 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix} {}^{\circ}C \quad \underline{\dot{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \frac{kW}{K}$$

- Apparatedaten

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{I}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{O}}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{II} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{III} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{L}}} = \begin{bmatrix} .04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .04 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .04 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .04 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .04 \end{bmatrix} \frac{kW}{K}$$

- Ergebnisse

$$\underline{\underline{\Phi}}^o = \begin{bmatrix} 0.054 & 0.114 & 0.832 \\ 0.060 & 0.234 & 0.066 \\ 0.268 & 0.683 & 0.049 \\ 0.068 & 0.259 & 0.673 \\ 0.105 & 0.212 & 0.683 \\ 0.070 & 0.262 & 0.668 \\ 0.280 & 0.697 & 0.023 \\ 0.264 & 0.720 & 0.016 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{T}}}^o = \begin{bmatrix} 33.7 \\ 13.9 \\ 47.3 \\ 33.5 \\ 37.3 \\ 33.7 \\ 48.2 \\ 46.6 \end{bmatrix} ^\circ C$$

$$\underline{\underline{\Phi}}^O = \begin{bmatrix} 0.116 & 0.369 & 0.355 \\ 0.274 & 0.690 & 0.036 \\ 0.080 & 0.163 & 0.757 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{T}}}^O = \begin{bmatrix} 31.9 \\ 47.8 \\ 35.5 \end{bmatrix} ^\circ C$$

3.2.6 Spiralplattenwärmeübertrager

- Prozeßstromdaten

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}^I = \begin{bmatrix} 120 \\ 20 \end{bmatrix} ^\circ C \quad \underline{\underline{\dot{\mathbf{C}}}} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -1.0 \end{bmatrix} \frac{kW}{K}$$

- Apparatedaten

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{I}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{O}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{L}}} = \begin{bmatrix} .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .035 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .045 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .055 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .065 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .075 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .085 \end{bmatrix} \frac{kW}{K}$$

- Ergebnisse

$$\underline{\underline{\Phi}}^o = \begin{bmatrix} 0.005 & 0.995 \\ 0.184 & 0.816 \\ 0.025 & 0.975 \\ 0.245 & 0.755 \\ 0.071 & 0.929 \\ 0.383 & 0.617 \\ 0.163 & 0.837 \\ 0.692 & 0.308 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{T}}}^o = \begin{bmatrix} 20.5 \\ 38.4 \\ 22.5 \\ 44.5 \\ 27.1 \\ 58.3 \\ 36.3 \\ 89.2 \end{bmatrix} ^\circ C$$

$$\underline{\underline{\Phi}}^O = \begin{bmatrix} 0.184 & 0.816 \\ 0.163 & 0.837 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{T}}}^O = \begin{bmatrix} 38.4 \\ 36.3 \end{bmatrix} ^\circ C$$

4 Erweiterungsmöglichkeiten des Modells

4.1 Berücksichtigung der Wärmeleitung in Wandlängsrichtung

Für bestimmte Anwendungsfälle ist es wichtig die Wärmeleitung in Längsrichtung der Wand zu kennen. Starke Wärmeleitung in der Wand bedeutet eine Beeinflussung des Temperaturprofils des Apparates und damit Veränderung der thermodynamischen Eigenschaften. In Abbildung 8 ist eine Gegenstromwärmeübertrager dargestellt, bei welchem die Wandleitung in Längsrichtung Berücksichtigung finden soll.

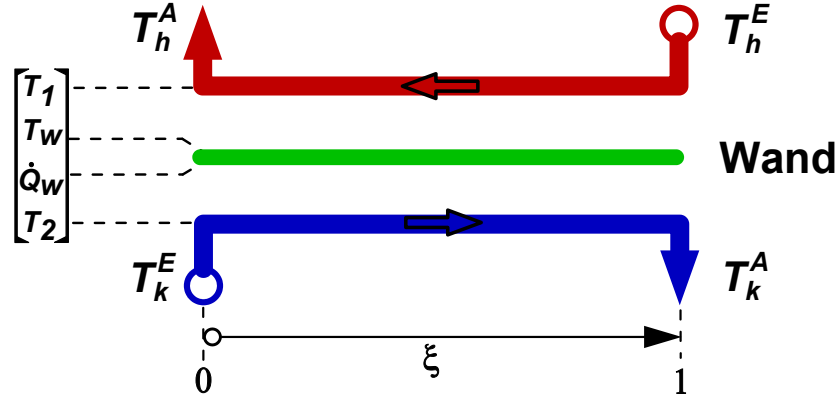


Abbildung 8: Gegenstromwärmeübertrager

Der beschreibende Vektor ist um zwei Größen, die Wandtemperatur und den Wärmestrom durch die Wand zu erweitern. Das beschreibende modifizierte Differentialgleichungssystem lautet:

$$\frac{d}{d\xi} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_w \\ \dot{Q}_w \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1 A}{\dot{C}_1} & -\frac{\alpha_1 A}{\dot{C}_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{l}{\lambda F} & 0 \\ \alpha_1 A & -(\alpha_1 + \alpha_2) A & 0 & \alpha_2 A \\ 0 & \frac{\alpha_2 A}{\dot{C}_2} & 0 & -\frac{\alpha_2 A}{\dot{C}_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_w \\ \dot{Q}_w \\ T_2 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\frac{d}{d\xi} \underline{\tilde{\mathbf{T}}} = \underline{\tilde{\mathbf{N}}} \underline{\tilde{\mathbf{T}}}$$

Dieses Wandleitungsmodell ist formal in alle Modelle für Plattenwärmeübertrager involvierbar.

Die Lösung dieses Differentialgleichungssystems geschieht analog zur vorstehend beschriebenen Berechnungsmethode. Da die Anfangs- und Endwerte der Wandtemperatur nicht bekannt sind, ist partiell zu invertieren, so daß die zu- und abgeführte Wärmemenge an den Stellen $\xi = 0$ und $\xi = 1$ vorgegeben wird.

4.2 Berücksichtigung der Dispersion in den Passagen

Das Temperaturprofil entlang der Passagen wird ebenfalls stark durch Rückvermischungseffekte (Dispersion) beeinflusst. Die Dispersion wirkt sich auf die thermodynamischen Eigenschaften eines Wärmeübertragers aus. Mit dem vorgestellten Modell ist es möglich diese Effekte zu modellieren. Das beschreibende Differentialgleichungssystem für den Gleichstromwärmeübertrager in Abbildung 1 ist hierbei zu modifizieren. Neben den dimensionslosen Übertragungseinheiten wird die Bodenstein-Zahl benötigt.

$$\frac{d}{d\zeta} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_1' \\ T_2 \\ T_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ N_1 Bo_1 & Bo_1 & -N_1 Bo_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -N_2 Bo_2 & 0 & N_2 Bo_2 & Bo_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_1' \\ T_2 \\ T_2' \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\frac{d}{d\zeta} \underline{\underline{\check{\mathbf{T}}}} = \underline{\underline{\check{\mathbf{N}}}} \underline{\underline{\check{\mathbf{T}}}}$$

Die Lösung erfolgt ebenfalls nach dem dargestellten Schema.

5 Zusammenfassung

Im Vortrag wird ein allgemeines Berechnungsmodell für die Simulation des stationären Verhaltens von beliebig konfigurierten Plattenwärmeübertragern vorgestellt. Das numerische Modell ermöglicht bei analytischer Rechengenauigkeit die iterationslose Ermittlung der Temperaturprofile. Es ist wahlweise möglich mit dem Modell die Wärmeleitung entlang der Platten sowie die Dispersion in den Strömungspassagen zu berücksichtigen.

Die Entwicklung des Modells ist noch nicht beendet. Gegenwärtig wird nach einer Möglichkeit gesucht, Kreuzstromapparate in das Modellkonzept einzubeziehen.

6 Symbolverzeichnis

Formelzeichen

A	... Wärmeübertragungsfläche	... $[m^2]$
α	... Wärmeübergangskoeffizient	... $[W\ m^{-2}K^{-1}]$
$\dot{C}$	... Wärmekapazitätsstrom	... $[W\ K^{-1}]$
$\underline{\dot{C}}$	... Wärmekapazitätsvektor	... $[W\ K^{-1}]$
$\underline{\underline{\dot{C}}}$	... Kapazitätsmatrix	... $[W\ K^{-1}]$
$\underline{\underline{H}}$	... Enthalpievektor	... $[W]$
$\underline{\underline{I}}$	... Inputmatrix	... $[1]$
k	.. Wärmedurchgangskoeffizient	... $[W\ m^{-2}K^{-1}]$
$\underline{\underline{K}}$	... Kopplungsmatrix	... $[1]$
$\underline{\underline{L}}$	... Leitwert-Matrix	... $[W\ K^{-1}]$
N	... Zahl der Übertragungseinheiten	... $[1]$
$\underline{\underline{N}}$	... Übertragungsmatrix	... $[1]$
$\underline{\underline{O}}$	... Outputmatrix	... $[1]$
Bo	... Bodenstein-Zahl	... $[1]$
$\underline{\underline{\dot{Q}}}$	... Wärmestromvektor	... $[W]$
$\underline{\underline{R}}$	... Richtungsmatrix	... $[1]$
$\underline{\underline{S}}$	... Strukturmatrix	... $[1]$
T	... Temperatur	... $[K]$
$\underline{\underline{T}}$	... Temperaturvektor	... $[K]$
x	... Verteilungskoeffizient	... $[1]$
$\underline{\underline{\Delta T}}$	... Vektor der treibenden Temperaturdifferenzen	... $[K]$
Φ	... Betriebscharakteristik	... $[1]$
$\underline{\underline{\Phi}}$	... Apparatematrix 1 und 2	... $[1]$
ς	... dimensionslose Ortskoordinate	... $[1]$

tief gestellte Indizes

i	... Zählindex
j	 Zählindex
k	... kalt
h	... heiß
p	... Passage
w	... Wand
1	... an der Stelle $\varsigma = 1$

hoch gestellte Indizes

A	...	Apparat
i	...	input (Passage)
I	...	input (Apparat)
o	...	output (Passage)
O	...	output (Apparat)
$\rightarrow$	...	gerichtet
$\sim$	...	modifiziert
$\smile$	...	modifiziert

7 Literatur

- [1] Strelow, O.: Eine allgemeine Methode zur Berechnung von Wärmeübertragerschaltungen, Forschung im Ingenieurwesen 63(1997)9 S. 255-261
- [2] Martin, H.: Wärmeübertrager, 1. Aufl., S. 62-84, Georg Thieme Verlag Stuttgart-New York 1988
- [3] Domingos, J.D.: Analysis of Complex Assemblies of Heat Exchangers. Int. Heat Int. Heat Mass Transfer 12(1969) 537-548
- [4] Bošnjaković, F.; Viličić, M. und Slipčević, B.: Einheitliche Berechnung von Rekuperatoren, VDI-Forschungsheft 432, Ausg. B, Band 17, 1951
- [5] Cielinski, P.J. and T. Bes: Analytical Heat Transfer Studies in a Spiral Plate Exchanger. XVI Congr. of Refrigeration, Institut du Froid Paris (1983) 449-454



Technische Hochschule Mittelhessen
University of Applied Sciences

Wiesenstraße 14
D-35390 Gießen

www.thm.de